مكيد علي

بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية

الجزء الأول

البرمجة الرياضية

دروس ومسائل محلولة



ديوان المطبوعات الجامعية

الكتب الصادرة عن ديوان المطبوعات الجامعية لنفس المؤلف:

- الاقتصادي القياسي دروس ومسائل محلولة (الطبعة الثانية) ماي 2011

رقم النشر: 4.01.5587
رقم ر.د.م.ك (ISBN): 978.9961.0.1834.7
رقم الإيداع القانوني: 2015/1651

الفهرس



مقدمة

إن المكتبة العربية في بلادنا تعاني نقصا ملحوظا في المراجع الأساسية في ميدان الاقتصاد الرياضي، بحوث العمليات وتقنيات التحليل الكمي واستخداماتها في مجال الإدارة. ويمثل هذا الكتاب محاولة متواضعة لسد هذا العجز.

إن هذا الكتاب موجه إلى طلبة السنوات النهائية من التخصصات الاقتصادية، التجارية والمالية لمساعدتهم على فهم وإدراك وبالتالي التحكم الجيد في استعمال الطرق والأدوات الرياضية في التحليل الاقتصادي.

هذا الكتاب موجه أيضا إلى المسيرين والإطارات التي تعمل في الميدان لمساعدهم على الإلمام بتقنيات التسيير الحديثة وخاصة الجوانب التطبيقية منها واستعمالها في مجال اتخاذ القرارات الإدارية. فلا شك أن إدارة المؤسسات الاقتصادية الحديثة أصبحت عملية في غاية من التعقيد، ومن هنا بدأ الاتجاه نحو الاستخدام والتحكم أكثر فأكثر في التقنيات والنماذج الكمية كأدوات مساعدة على اتخاذ القرارات السليمة، وعلى المعرفة المسبقة لآثار هذه القرارات على نتائج المؤسسة والمحيط الذي تعمل فيه.

لقد توخينا في إعداد هذا الكتاب التبسيط قدر الإمكان والاستعانة بقدر واسع بالأمثلة، والابتعاد عن التجريد والمسائل الرياضية النظرية المعقدة. فعرضنا النماذج الرياضية المختلفة في أبسط صورها حتى نساهم في نزع الغموض والتخوف الذي عادة ما يصاحب دراسة هذا الفرع من العلوم الاقتصادية.

وفي رأينا فإن الصعوبة التي يلاقيها الدارسون لهذا التخصص لا ترجع لصعوبة مواضعها أو قلة المختصين في هذا الميدان بقدر ما تعود إلى قلة المراجع فيها، وخاصة المراجع الأساسية.

لقد جمعنا في هذا الكتاب الأجزاء الرئيسية لجزء هام من بحوث العمليات وهو البرمجة الرياضية، فخصصنا:

الفصل الأول منه للبرمجة الخطية، وفيه تعرضنا إلى تكوين النموذج الخطي في المبحث الأول، وفي المبحث الثاني إلى حل النماذج الخطية باستعمال الطريقة البيانية، أما في المبحث الثالث فيجد القارئ عرضا مبسطا لطريقة السمبلكس واستعمالها في حل مسائل البرمجة الخطية. في المبحث الرابع أوردنا أهم الحالات الخاصة لطريقة السمبلكس، أما المبحث الخامس فيتناول مسألة الثنائية في البرمجة الخطية. كل مبحث متبوع بعدد من التمارين والمسائل التطبيقية.

الفصل الثاني من هذا الكتاب يتناول أسلوب البرمجة البارامترية، وفيه عرضنا من خلال بعض الأمثلة تأثير تغير معاملات دالة الهدف على قيمها المثلى في المبحث الأول. أما في المبحث الثاني فأوردنا فيه إمكانيات تغير كميات الموارد المتاحة (الطرف الأيمن للقيود الفنية) وتأثيرها على الوضعية المثلى لدالة الهدف.

الفصل الثالث خصصناه لنموذج البرمجة الديناميكية وتطبيقاته المختلفة، المبحث الأول من هذا الفصل يتناول تذكيرا بأهم القواعد النظرية للنموذج، المبحث الثاني يتناول أهم التطبيقات الاقتصادية لنموذج البرمجة الديناميكية.

لابد أن نشير أن عددا من الأمثلة التطبيقية والتمارين في هذا الكتاب يعتمد على كتب بعض الاختصاصيين المعروفين في ميدان بحوث العمليات مثل R. Dorfman, A. G. Desbazeille, Kaufmann, Faure وغيرهم.

وأدعو الله التوفيق والقبول

أ.د. مكيد علي

الفصل الأول
البرمجة الخطية

البرمجة الخطية هي أسلوب أو طريقة رياضية صممت لمساعدة المسيرين في تخصيص أو استعمال الموارد المتاحة للمؤسسة الاقتصادية استعمالا أمثلا، قبل شرح طرق حل مسائل البرمجة الخطية سوف نتعرض أولا لكيفية وضع أو تكوين النموذج الخطي، أي تحويل المشكلة الاقتصادية من صورتها النظرية (الوصفية) إلى شكل نموذج رياضي يمكن حله باستخدام أسلوب البرمجة الخطية.

يمكن تلخيص أنواع أو نمط المسائل الاقتصادية التي يمكن استخدام البرمجة الخطية في حلها كالآتي:

– عادة ما يطرح على المؤسسة الاقتصادية تحقيق أهداف اقتصادية عامة، كتحقيق أكبر ربح ممكن، أكبر رقم أعمال ممكن، أكبر إنتاج ممكن أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن ... إلخ.

– هذا الهدف يرمز له بمتغير تابع ما عادة ما يكون دالة في عدد من المتغيرات المستقلة، ويسمى بدالة الهدف أو الدالة الاقتصادية (La fonction économique)، ويكون مطلوبا من المؤسسة الاقتصادية إيجاد قيمة مثلى (une valeur optimale) لهذا المتغير: يعني تعظيم (Maximiser) الدالة الاقتصادية أو تخفيضها إلى أدنى حد ممكن (Minimiser). فإذا رمزنا للهدف المراد تحقيقه بالرمز (Z) مثلا ورمزنا للعوامل التي تؤثر فيه بالرمز ($X_1 , X_2 , ..., X_n$) فإن المطلوب يكون:

$$\text{opt (max , min) } Z = f(X_1, X_2, \dots , X_n).$$

إن تحقيق هذا الهدف يكون طبعا ضمن حدود معينة، وهذه الحدود تمثل الإمكانيات أو الموارد المالية، البشرية والمادية المتاحة للمؤسسة والتي تعمل وتنشط في إطارها، أي أن تحقيق هذا الهدف يكون مقرونا ومحددا بحجم الموارد التي هي بحوزة المؤسسة.

هذه الإمكانيات أو الموارد المتاحة للمؤسسة تشكل قيودا على المؤسسة في سبيل تحقيق أهدافها، وهذه القيود تسمى بالقيود الفنية (Les contraintes techniques)، وعادة ما يعبر عنها في شكل متباينات أو معادلات (= , ≥ , ≤) لمجموعة من المتغيرات المستقلة (X_j)، والتي نريد إيجاد قيمة لها عن طريق حل النموذج الخطي.

إن حل هذا النوع من المشكلات الاقتصادية عن طريق استعمال البرمجة الخطية يتطلب إذن:

- وضع المشكلة الاقتصادية محل الدراسة في شكل نموذج (برنامج) رياضي خطي متكون من دالة الهدف (الدالة الاقتصادية) وقيود الموارد المفروضة على المؤسسة من أجل تحقيق دالة هدفها.

- ثم حل هذا النموذج الخطي عن طريق إيجاد قيم للمتغيرات المستقلة التي تعطي قيمة مثلى (max, min) لدالة الهدف مع مراعاة القيود الفنية المفروضة على المؤسسة.

شروط استخدام البرمجة الخطية:

هناك شروط يجب توفرها في المشكلة التي نريد حلها بواسطة البرمجة الخطية نذكر من أهمها:

- شرط الخطية: يجب أن تكون هناك علاقة خطية بين العوامل المستقلة المؤثرة في المشكلة المدروسة والتي يرمز لها بالرمز (X_i)، والمشكلة المدروسة في حد

ذاتها والتي نرمز لها بالمتغير التابع (Y)، ونعبر عن هذه العلاقة بالصيغة التالية: $Y = a + bX_i$.

- وحدة الهدف: يجب أن يسعى نموذج البرمجة الخطية إلى تحقيق هدف وحيد يكون إما في شكل تعظيم أو تدنية لهذا الهدف.

- الصياغة الكمية للمشكلة: يجب أن يكون ممكنا التعبير عن العلاقة بين المتغيرات التي تحتويها المشكلة تعبيرا كميا إما في شكل معادلات أو في شكل متراجحات أو في الشكلين مع بعض.

- تعدد القيود الفنية: تشتمل المشكلة المدروسة على مجموعة من القيود الفنية، التي تؤثر على حرية متخذ القرار للوصول إلى الحل الأمثل، وهذا يفترض التضحية ببعض بدائل الحلول. تتعلق هذه القيود الفنية بمدخلات النشاط والإمكانيات المتاحة مثل المواد والتجهيزات، الطاقة الإنتاجية المتاحة، الموارد المالية، الموارد البشرية، وبصفة عامة كل عناصر الإنتاج وظروف العمل المستعملة.

- تعدد بدائل الحل: يفترض نموذج البرمجة الخطية أن يكون لمتخذ القرار خيارات مختلفة لحل النموذج حتى يمكن اختيار أفضلها، الذي يسمى الحل الأمثل، وهو ذلك الحل الذي يعظم دالة الهدف أو يدنيها إلى أدنى قيمة لها في حدود القيود الفنية المعطاة.

- عدم السلبية: يفترض أن تكون قيم كل مؤشرات النموذج غير سالبة، معبرة في ذلك على عدم سلبية المؤشرات الاقتصادية.

- قابلية التجزئة: يقبل نموذج البرمجة الخطية القيم الكسرية للمؤشرات التي يتكون منها (يمكن تجزئة قيم هذه المتغيرات)، ومن هنا لا يحتاج حل النموذج أن تكون كل قيم متغيراته أرقاما صحيحة.

فروض نموذج البرمجة الخطية:

- يفترض النموذج إمكانية النسبة والتناسب في كل مكوناته (دالة الهدف والقيود الفنية).

- تحقيق خاصية الجمع التي تعني أن القيمة الكلية لأي مؤشر ما هي إلا حاصل جمع قيمه الجزئية.

- يعالج نموذج البرمجة الخطية الحالات المتصفة بالتأكد التام، وهذا يعني أن القيم التي تأخذها مؤشرات النموذج هي كلها قيم محددة ومعروفة ولا يطرأ عليها تغيير خلال فترة الدراسة.

سوف نتعرض إذن في هذا الفصل إلى:

المبحث الأول: صياغة النموذج الرياضي الخطي أي تحويل المشكلة الاقتصادية المدروسة إلى شكل نموذج رياضي خطي، بمعنى نمذجة هذه المسألة (L'élaboration d'un programme linéaire).

المبحث الثاني: حل نموذج البرمجة الخطية باستعمال الطريقة البيانية (la méthode graphique).

المبحث الثالث: حل نموذج البرمجة الخطية باستعمال طريقة السمبلكس (la méthode du simplexe).

المبحث الأول

نمذجة المشكلة الاقتصادية

سوف نتعرض الآن لبعض الأمثلة التي تبين بعض المشاكل الاقتصادية التي يمكن أن تطرح على المؤسسة الاقتصادية والتي تتطلب استعمال البرمجة الخطية في حلها حتى نوضح من خلالها كيف يمكن تحويل معطيات هذا النمط من المشاكل الاقتصادية إلى معطيات نموذج رياضي خطي.

مثال 1: نفترض وجود عدد من الآلات (m) تستعمل في إنتاج عدد من المنتجات (n)، نرمز للآلات بالرمز (B) ونرمز للمنتجات بالرمز (A). كل آلة (B_i) طاقة عملها القصوى في اليوم هي: (b_i) ساعة / يوم، حيث $(i = 1, ..., m)$.

كل آلة (B_i) تستهلك زمنا مقداره (a) من أجل إنتاج وحدة واحدة من كل منتج (A_J)، حيث أن $(J=1, 2, ..., n)$، أي أن (a_{ij}) هو الوقت المستهلك من طرف الآلة (B_i) في إنتاج وحدة واحدة من المنتج (A_J).

هذه المعطيات يمكن تلخيصها في جدول كالآتي:

الآلات	طاقة عملها القصوى	المنتجات (A_j)			
		A_1	A_2	A_3..........	A_n
B_1	b_1 (س/ يوم)	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1n}
B_2	b_2(س/ يوم)	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2n}
B_3	b_3 (س/ يوم)	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{3n}
....	....	....	......	......	.....
B_m	b_m (س/ يوم)	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{mn}

هذا الجدول يسمى بمصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج، وهي توضح شكل استهلاك الموارد المتاحة من أجل إنتاج المنتجات المفروضة.

فمثلا: (a_{11}) تعني الوقت الذي تحتاجه الآلة الأولى (B_1) من أجل إنتاج وحدة واحدة من المنتج (A_1)، (a_{12}) تعني الوقت اللازم استهلاكه من طرف الآلة الأولى (B_1) من أجل إنتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني (A_2)، أما (a_{32}) فتعني الوقت اللازم لإنتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني (A_2) من طرف الآلة الثالثة (B_3) وهكذا ... .

إذا كانت المؤسسة المذكورة تهدف إلى تعظيم أرباحها مثلا، فالمطلوب هو: البحث عن كميات الإنتاج التي يجب على المؤسسة إنتاجها من المنتجات المختلفة التي تسمح لها بتعظيم أرباحها.

إن المسألة في وضعها النظري الحالي لا تسمح لنا بحلها وبالتالي الإجابة على السؤال المطروح، ومن أجل التمكن من ذلك يجب أولا تحويل هذه المسألة من شكلها الحالي إلى شكل نموذج خطي، ثم حل هذا النموذج.

ما نعرفه من المعطيات الحالية للمسألة هو وقت العمل الذي تستهلكه الآلات من أجل إنتاج وحدة واحدة من كل منتج من المنتجات المختلفة الذي رمزنا له بالرمز (a_{ij})، وكذلك طاقة العمل اليومية القصوى للآلات. لكن المؤسسة المعنية سوف لن تنتج وحدة واحدة فقط من كل منتج، بل يلزمها إنتاج كميات معينة ما من كل منتج والتي تسمح لها بتعظيم أرباحها. ما هو حجم هذه الكميات؟

– لا يمكننا حاليا تحديد الحجم الذي يجب على المؤسسة إنتاجه من مختلف المنتجات والذي يسمح لها بتعظيم أرباحها، ما نستطيع فعله في المرحلة الحالية هو

افتراض أن هذه الكميات مجهولة ونرمز لها بالرمز (X_j). فإذا عرفنا الكمية المنتجة من المنتج (A_j) وهي (X_j)، وعرفنا أيضا الوقت المستهـلك من طرف الآلـة (B_i) في إنتاج كل وحدة من المنتج المذكور (A_j) وهو (a_{ij})، فيكون الوقت المستهلك من طرف الآلة (B_i) في إنتاج كل الكمية (X) من المنتج (A_j) هو المقدار ($a_{ij} . X_j$).

فمثلا: ($a_{32} . X_2$) يعني الوقت المستهلك من طرف الآلة ($i = 3$) في إنتاج الكمية (X) من المنتج الثاني (A_2)، وبالتالي يكون الوقت المستهلك من طرف الآلة الأولى (B_1) مثلا في إنتاج كل الكميات ($X_1, X_2, ..., X_n$) من المنتجات: ($A_1, A_2, ... , A_n$) هو:

$$a_{11} X_1 + A_{12} X_2 + a_{13} X_3 + ... + a_n X_n .$$

ولكن نحن نعرف أن طاقة العمل لهذه الآلة محدودة، أي أنها لا تستطيع الإنتاج بدون حدود، وهذه الطاقة العملية القصوى هي (b_1 ساعة/يوم)، إذا فهذا يشكل إحدى القيود الفنية المفروضة على المؤسسة في سبيل تحقيق هدفها وهو تعظيم الأرباح مثلا. هذا القيد الفني يتمثل في محدودية وقت العمل المتاح للآلة الأولى من أجل المشاركة في الإنتاج، ويمكن كتابته كالتالي:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + ... + a_{1n}X_n \leq b_1 .$$

وهو يعني أن الوقت المستهلك من طرف الآلة (B_1) في إنتاج الكميات ($X_1, X_2, ... , X_n$) من المنتجات ($A_1, A_2, A_3, ... , A_n$) يجب أن يكون أقل أو يساوي (أي لا يتجاوز) زمن تشغيلها الأقصى في اليوم.

وبنفس الطريقة يمكن كتابة القيد الزمني المفروض على الآلة الثانية، كما يلي:

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + A_{23} X_3 + ... + a_{2n} X_n \leq b_2 .$$

وهكذا القيد الزمني المفروض على الآلة B_m يكون:

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 + \dots + a_{mn} X_n \leq b_m.$$

نفرض الآن أن الربح الذي تحققه المؤسسة من بيع كل وحدة واحدة من المنتج (A_j) هو (C_j) وحدة نقدية، فالهدف هنا بالنسبة للمؤسسة هو تعظيم (max) الربح الذي تحصل عليه من بيع كل الكميات (X_j) المنتجة من مختلف المنتجات (A_j)، وهذا يتمثل في مشكل تحديد (إيجاد) عدد الوحدات (X_j) التي يجب إنتاجها من مختلف المنتجات، بحيث تحقق المؤسسة أكبر ربح ممكن. ف$(C_j . X_j)$ هو مقدار يعني الربح المحصل عليه من بيع الكمية (X_j) المنتجة من المنتج (A_j). والربح المحصل عليه من بيع كل الكميات $(X_1 , X_2 , \dots , X_n)$ المنتجة من مختلف المنتجات $(A_1, A_2, \dots , A_n)$ هو: $Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ Xj$. وتكون دالة الهدف التي يجب على المؤسسة تحقيقها هنا هي: $max\ Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ X j$، والنموذج الخطي الممثل لهذه المشكلة يمكن عرضه كالتالي:

$$\max Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

في ظل القيود الفنية التالية:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n \leq b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n \leq b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \leq b_m$$

أو:

$$\begin{cases} \max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \\ i = 1 ,\dots ,m \end{cases}$$

بالإضافة إلى هذه القيود الفنية، هناك قيود أخرى التي تفرض أن يكون $(X_j \geq 0)$ و $(b_j \geq 0)$، أي أن كميات الإنتاج (X_j) وكميات الموارد المستعملة (b_j) يلزم أن تكون قيما غير سالبة، وهذا يعني أن المؤسسة يلزم أن تنتج صفر أو قيم موجبة من المنتجات، ونفس الشيء بالنسبة للموارد.

بصفة عامة، فإن الشكل العام لأي نموذج رياضي خطي يكون على الشكل التالي:

$$Opt(max , min)\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j \ (\leq \ , \geq \ , = \ ) \ b$$
$$X_J \geq 0 \ , \ b_i \geq 0 \quad , \ i = 1 , \ldots ,$$

نأخذ الآن المثال السابق في شكل رقمي مبسط: نفرض أن المؤسسة المذكورة تنتج منتجين فقط (A_1, A_2) بكميات (X_1, X_2) وتستعمل في إنتاجهما آلتين (B_1, B_2) فقط، وأنه من أجل إنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول (A_1) يلزم استهلاك (2 ساعة) من وقت العمل اليومي المتاح للآلة الأولى و (2 ساعة) من وقت العمل اليومي المتاح للآلة الثانية. ومن أجل إنتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني (A_2) يلزم استهلاك (3 ساعات) من وقت العمل اليومي المتاح للآلة الأولى و(1 ساعة) من الوقت العملي للآلة الثانية، فيكون جدول المعاملات الفنية للإنتاج هو $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$، إذا افترضنا أن الطاقة القصوى لعمل الآلة الأولى هي: $b_1 = 12$ (ساعة/يوم)، والطاقة القصوى لعمل الآلة الثانية هي: $(b_2 = 8$ ساعة/يوم)، الربح المحصل عليه من بيع كل وحدة من المنتج الأول هو $(C_1 = 6$ وحدات نقدية) ومن بيع الوحدة الواحدة من المنتج الثاني هو $(C_2 = 7$ وحدات نقدية).

فتكون القيود الفنية المفروضة على المؤسسة (قيود الموارد) هي:

$2X_1 + 3X_2 \leq 12$

$2X_1 + X_2 \leq 8$

$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0$

ودالة الهدف هي: $MAX\ Z = 6X_1 + 7X_2$

مثال 2: مصنع ما ينتج منتجين، كل وحدة من المنتج الأول تتطلب لإنتاجها (6 ساعات) عمل من وقت تشغيل الآلة و (4,5 وحدة) من المادة الأولية، وكل وحدة من المنتج الثاني تتطلب (8 ساعات) عمل للآلة و (3 وحدات) من المادة الأولية.

– طاقة العمل القصوى للآلة هي (250 ساعة/شهر) وعدد وحدات المادة الأولية الممكن توفرها في الشهر هو (500 وحدة).

– الربح الممكن الحصول عليه من بيع وحدة واحدة من المنتج الأول والمنتج الثاني هو: ($C_1=4$ وحدة نقدية)، ($C_2=10$ وحدة نقدية) على التوالي.

المطلوب: ما هي الكميات من المنتج الأول والثاني التي يجب على المؤسسة إنتاجها من أجل تعظيم أرباحها في حدود الموارد المتاحة لها.

الحل: لا نستطيع الإجابة على هذا السؤال مباشرة الآن، ولو كنا باستطاعتنا الإجابة عليه لما كنا مضطرين أن نكون نموذجا لهذه المسألة ثم حلها بعد ذلك. ما نستطيع فعله الآن هو فقط افتراض أن ما يجب على المؤسسة إنتاجه من أجل تعظيم أرباحها في حدود الموارد المتاحة لها هو كميات غير معروفة، والتي نفرضها مثلا (X_2 , X_1)، ثم نكون نموذجا على هذا الأساس وبعد حل هذا النموذج فقط نستطيع الإجابة على السؤال السابق.

لدينا جدول المعاملات الفنية للإنتاج وهي: $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 4.5 \end{pmatrix}$ وهذا يعني أن الآلة تستهلك أو تصرف (6) ساعات عمل من أجل إنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول و(8) ساعات عمل من أجل إنتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني، فإذا افترضنا أن عدد الوحدات التي يجب على المصنع إنتاجها من أجل تعظيم أرباحه من المنتج الأول والثاني هي على التوالي (X_2, X_1)، فيكون وقت العمل الكلي الذي تحتاجه الآلة من أجل إنتاج الكمية (X_1) من المنتج الأول والكمية (X_2) من المنتج الثاني هو: ($6X_1 + 8X_2$). ولكن هذا الوقت الكلي الذي يمكن أن تصرفه الآلة في إنتاج المنتجين هو محدود بطاقة العمل الشهرية القصوى المتاحة لهذه الآلة وهي (250 ساعة/شهر)، إذن فالقيد الفني (القيد الزمني) الخاص بالآلة هو ($6X_1 + 8X_2 \leq 250$)، وهذا يعني أن الآلة المعنية تساهم في إنتاج المنتجين ولكن بشرط أن لا تتجاوز طاقة عملها القصوى. أما بالنسبة لمادة العمل: فحسب مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج نلاحظ أنه لإنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول ووحدة واحدة من المنتج الثاني يجب استعمال (4,5 وحدة) و (3 وحدات) على التوالي من هذه المادة الأولية، ومن أجل إنتاج الكميات (X_2, X_1) من المنتجين الأول والثاني يلزم توفير الكمية ($4,5X_1 + 3X_2$) من المادة الأولية، ولكن المتوفر من المادة الأولية لدى المصنع في الشهر هو (500 وحدة) فقط.

فاستعمال هذه المادة في إنتاج الكميات (X_2, X_1) من المنتجين لا يمكن أن يتجاوز الـ (500 وحدة) المتاحة. وبهذا المعنى يمكن التعبير عن القيد الفني الخاص بالمادة الأولية كما يلي: $4,5X_1 + 3X_2 \leq 500$، وشرط عدم السلبية الخاص بالكميات المنتجة X_1 ، X_2 هو: $X_1 \geq 0$ ، $X_2 \geq 0$.

وبما أن الربح المحصل عليه من بيع كل وحدة من المنتجين المذكورين هو: (4 و10 وحدات نقدية على التوالي) فيكون الربح الإجمالي الذي يحصل عليه المصنع من بيع الكميات (X_2, X_1) من المنتجين هو كالتالي: $Z = 4X_1 + 10X_2$. ودالة الهدف (الدالة الاقتصادية) هي:

$$\max Z = 4X_1 + 10X_2$$

مثال:3 يقوم مصنع كيميائي بإنتاج مادة كيميائية فلاحية انطلاقا من مركبين كيميائيين (A_2, A_1) اللذان يقوم باستيرادهما، ونظرا للصعوبات التي يصادفها في عملية الاستيراد ومن أجل ضمان تنفيذ برنامجه الإنتاجي، يقوم هذا المصنع بتحضير هذين المركبين في ورشاته انطلاقا من مادتين أوليتين كيميائيتين (B_2, B_1) اللتان يقوم بشرائهما في السوق المحلية.

كل وحدة واحدة من المادة الأولية الأولى (B_1) تنتج أو تعطي $(0{,}1)$ وحدة من المركب (A_1) و $(0{,}5)$ وحدة من المركب (A_2). وكل وحدة واحدة من المادة الأولية الثانية (B_2) تنتج أو تعطي $(0{,}6$ وحدة) من المركب A_1 و $0{,}2))$ وحدة من المركب A_2، ومن أجل أن يكون المصنع قادرا على تنفيذ برنامجه الإنتاجي ومواجهة الطلب على المادة الكيميائية الفلاحية في السوق يتطلب كحد أدنى توفير الكمية $b_1 = 15$ وحدة من المركب A_1 والكمية $b_2 = 20$ وحدة من المركب A_2. ثمن شراء (تكلفة) الوحدة الواحدة من المواد الأولية (B_1, B_2) هما على التوالي: $(P_1= 100$ وحدة نقدية)، $(P_2 = 300$ و.ن). هدف المصنع هو شراء كميات من المادتين الأوليتين (B_2, B_1) بأقل تكلفة ممكنة لإنتاج الحد الأدنى المطلوب من كميات المركبين (A_2, A_1).

المطلوب: هو تكوين النموذج الخطي الخاص بنشاط المصنع الذي يسمح له بإنتاج الحد الأدنى من المركبين الكيميائيين (A_2, A_1)، اللازمين لإنتاج المادة الكيميائية الفلاحية، لكن بأقل تكلفة شراء ممكنة للمادتين الأوليتين الكيميائيتين (B_1, B_2)

الحل: لدينا جدول المعاملات الفنية هو: $\begin{pmatrix} 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$ وهذا يعني أن كمية المركب A_1 المستخرجة من وحدة واحدة من المادة الأولية B_1 هي (0,1) وحدة ومن المادة الأولية (B_2) هي (0,6) وحدة، فإذا افترضنا أن عدد الوحدات التي يجب على المصنع شراءهما من المادتين الأوليتين (B_2, B_1) من أجل تدنية دالة تكاليفه هي:) (X_2, X_1) ، فإن كمية المركب الأول (A_1) المستخرجة منهما هي: $0,1X_1 + 0,6X_2$ ولكن المصنع ملزم بأن تكون الكمية التي يجب أن يوفرها كحد أدنى من المركب (A_1) هي (b_1 - 15) وحدة، فيكون القيد الفني الخاص بإنتاج المركب الكيميائي (A_1) هو:

$$\boxed{0,1X_1 + 0,6X_2 \geq 15}$$

وهذا يعني أن ما ينتجه المصنع من المركب الكيميائي (A_1) لا يجب أن يقل على الكمية ($b_1 = 15$) وحدة.

بالنسبة للمركب الكيميائي الثاني (A_2)، نلاحظ من مصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج أن كمية المركب (A_2) الممكن استخراجها من وحدة واحدة من المادة الكيميائية الأولى (B_1) المشتراة هي: (0,5 وحدة) ومن وحدة واحدة مشتراة من المادة الكيميائية الثانية (B_2) هي (0,2 وحدة)، وتكون الكمية الكلية المستخرجة من المركب الثاني (A_2) هي: $0,5X_1 + 0,2X_2$، فإذا عرفنا أن الحد الأدنى الذي يجب توفيره من المركب الثاني (A_2) هو $b_2 = 20$ وحدة، فإن القيد الفني الخاص بهذا المركب الثاني يكون:

$$\boxed{0,5X_1 + 0,2X_2 \geq 20}$$

وشروط لا سلبية مؤشرات النشاط: $X_2 \geq 0$ و $X_1 \geq 0$.

بما أن ثمن شراء الوحدة الواحدة من المادة الأولية (B_1) و (B_2) هو ($P_1 = 100$ وحدة نقدية) و ($P_2 = 300$ و.ن)، فتكون تكلفة شراء الكميات (X_2, X_1) من هذين المادتين هي: $Z = 100X_1 + 300X_2$. وتكون دالة الهدف هي:

$$\boxed{\min Z = 100X_1 + 300X_2}$$

أشكال النموذج الخطي:

1- الشكل العام (القياسي): La forme standard

عندما تكون القيود الفنية على شكل أكبر أو يساوي (≥)، أصغر أو تساوي (≤) أو مزيج من الشكلين السابقين وشكل يساوي (=)، ودالة الهدف تكون إما على شكل (min) أو على شكل (max).

أمثلة:

$$\begin{aligned} &4X_1 + 2X_2 + 10X_3 \leq 15 \\ &2X_1 + 5X_3 \leq 9 \\ &X_1 + 10X_2 + 8X_3 \leq 10 \\ &X_j \geq 0 \\ &\max Z = 3X_1 + 10X_2 + 2X_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 15 \\ &2X_1 + 3X_3 \geq 9 \\ &X_1 + 15X_2 + 10X_3 \geq 10 \\ &X_j \geq 0 \\ &\min Z = 2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \end{aligned}$$

$2X_1 + 2X_2 + 10X_3 \leq 15$

$3X_1 + 4X_2 + 5X_3 = 9$

$X_1 + 12X_2 + 15X_3 \geq 20$

$\max Z = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3$

$Xj \geq 0$

2 - الشكل "الكانوني": La forme canonique

في هذا الشكل كل القيود الفنية تكون على شكل مساواة (=). ودالة الهدف يمكن أن تكون على شكل (max) أو (min).

أمثلة:

$4X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 15$

$2X_1 + X_2 + 5X_3 = 9$

$3X_1 + 10X_2 + X_3 = 10$

$\max Z = 5X_1 + 4X_2 + X_3$

$X_j \geq 0$

$X_1 + X_2 + 2X_3 = 4$

$2X_1 + X_2 + 5X_3 = 9$

$5X_1 + 2X_2 + 7X_3 = 10$

$\min Z = 6X_1 + 2X_2 + X_3$

$X_j \geq 0$

لتحويل أي نموذج خطي من شكله القياسي إلى شكله الكانوني أو العكس، يلزم مراعاة القواعد التالية:

1- أي دالة هدف على شكل (max Z) يمكن تحويلها إلى شكل (min) كالتالي:

$\max Z = \min (-Z) = -\sum C_j Xj$

2– أي قيد فني على شكل (≤)، مثل $a_{ij} X_j \leq b_i$ ممكن تحويله إلى شكل (≥) كالتالي: $-a_{ij}X_j \geq -b_i$

3– أي قيد فني في شكل لا مساواة (متباينة) يمكن تحويله إلى شكل مساواة (أي الشكل الكانوني له) وذلك بإضافة (أو طرح) متغير الفرق (S_i) من طرفه الأيسر.

مثال: حول النموذج الخطي التالي من شكله القياسي إلى شكله الكانوني.

$10X_1 + 2X_2 \leq 15$

$X_1 + 3X_2 \leq 4$

$2X_1 + X_2 \geq 3$

$\max Z = 5X_1 + 2X_2$

$X_j \geq 0$

نضيف متغيرات الفرق (S_2, S_1) إلى الطرف الأيسر من القيد الفني الأول والثاني على التوالي، ونطرح S_3 من الطرف الأيسر للثالث فتتحول المتباينات إلى معادلات. وبذلك نحصل على الشكل الكانوني لهذا النموذج الخطي فتصبح:

$10X_1 + 2X_2 + S_1 = 15$

$X_1 + 3X_2 + S_2 = 4$

$2X_1 + X_2 - S_3 = 3$

$\max Z = 5X_1 + 2X_2$

$X_j \geq 0$

4- إذا كان قيد فني ما على شكل: $a_{ij}X_j = b_i$ وهو على شكله الكانوني، فلتحويله إلى شكله القياسي نكتبه كالتالي:

$a_{ij}X_j \geq b_i$.

$a_{ij}X_j \leq b_i$

5- لنفترض أن القيد الفني كان على شكل: $|a_{11} X_1 + a_{12} X_2| \leq b_i$

$b_i \geq 0$

فنحوله كالتالي:

$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 \leq b_i$

$- a_{11} X_1 - a_{12} X_2 \leq b_i$.

6- إذا كان أحد المتغيرات غير مقيد (حر)، فيمكن تعويضه بمتغيرين غير سالبين $(\dot{X}, \ddot{X})$ كالآتي: $X = \dot{X} - \ddot{X}$

بحيث: X (هو متغير حر: يمكن أن يأخذ قيمة سالبة، موجبة أو صفر)، و $\dot{X} \geq 0$, $\ddot{X} \geq 0$.

أمثلة:

1- حول شكل دالة الهدف التالية من min← إلى max:

$\min Z = 6X_1 - 3X_2 + 5X_3$

التحويل: $\max (- Z) = - 6X_1 + 3X_2 - 5X_3$

2 - حول القيد الفني التالي من الشكل الكانوني إلى الشكل القياسي:

$$\mathbf{2X_1 + 3X_2 + 4X_3 = 6}$$

التحويل:

$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \geq 6$

$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 6$

3 - عوض المتغير الحر في القيد الفني التالي: $2X_1 + 6X_2 + 3X_3$، حيث (X_3) هو متغير حر.

التحويل:

نضع $X = \dot{X}_3 - \ddot{X}_3$ ، بحيث $(\dot{X}_3 \geq 0)$ ، $(\ddot{X} \geq 0)$

ثم نكتب القيد الفني كالتالي: $(2X_1 + 6X_2 + 3 (\dot{X}_3 - \ddot{X}_3)$

4- حول القيد الفني التالي من شكل (≥) إلى شكل (≤):

$5X_1 + 4X_2 \geq 10$

التحويل: $-5X_1 - 4X_2 \leq -10$

5- حول القيد الفني التالي من شكله المطلق إلى شكله النسبي:

$|13X_1 + 5X_2| \geq 10$

التحويل:

$13X_1 + 5X_2 \geq 10$

$-13X_1 - 5X_2 \geq 10$

تمارين على تكوين النموذج الخطي

تمرين 01

مزرعة ما تنتج منتجين فلاحيين (القمح والذرة) باستعمال العنصرين الإنتاجيين الأساسيين العمل والأرض، تستعمل هذه المزرعة العنصرين الإنتاجيين المذكورين بالطريقة التالية: إنتاج 1 قنطار من الذرة يحتاج إلى 8 ساعات عمل و **1/15** هكتار من الأرض الفلاحية، وإنتاج 1 قنطار من القمح يحتاج إلى 12 ساعة عمل و **1/20** هكتار. إنّ المساحة الفلاحية الإجمالية المخصصة لإنتاج هذين المنتجين تقدر بـ 150 هكتار، عدد ساعات العمل التي تستطيع ميزانية المزرعة توفيرها هو 30000 ساعة/عام. ثمن بيع القنطار الواحد من الذرة 500 = وحدة نقدية، وثمن بيع القنطار الواحد من القمح 250 = و.ن. مع العلم أن المزرعة تحتفظ لنفسها بجزء من محصولها المقدر بـ: 1000 قنطار من القمح و500 قنطار من الذرة لإشباع حاجتها الداخلية. كون النموذج الخطي الخاص بنشاط المزرعة والذي يسمح، عند حله، بمعرفة الكميات من الذرة والقمح التي يلزم على المزرعة إنتاجها من أجل تعظيم رقم مبيعاتها.

الجواب:

$\text{Max } Z = 500X_1 + 250X_2 - 500000$

$4X_1 + 3X_2 \leq 90000$

$4X_1 + 6X_2 \leq 15000$

$X_1 \geq 500 \;\;,\;\; X_2 \geq 100$

تمرين 02:

لدينا مصنع لإنتاج الآجر والقرميد، عملية الإنتاج تتكون من المراحل التالية:

المرحلة A: الإنتاج: "إنتاج" الآجر والقرميد انطلاقا من المواد الأولية المستخرجة من الأرض، وتتميز بالخصائص التالية:

إنتاج 100 وحدة من القرميد تتطلب 2 ساعة عمل.

إنتاج 100 وحدة من الآجر تتطلب 1 ساعة عمل.

وقت العمل الأقصى المتاح لهذه المرحلة هو 100ساعة/يوم.

المرحلة B: "التجفيف" يلزم تجفيف الآجر والقرميد المحصل عليه في المرحلة الأولى قبل تسخينه، مكان التجفيف مقسم إلى أماكن خاصة: كل وحدة قرميد تشغل مكان (حيز) واحد، وكل وحدة من الآجر تشغل مكان (حيز) مماثل واحد أيضا، مكان التجفيف (المجفف) يستطيع استيعاب (5500 مكان).

المرحلة C: التسخين، في هذه المرحلة يدخل الآجر والقرميد المحصل عليه بعد التجفيف إلى الفرن لتسخينه، الفرن يستطيع أن يحتوي: إما على (800 قرميدة و0 آجر) أو على (400 وحدة آجر و0 قرميد). ولأسباب تقنية يلزم أن يكون في الفرن على الأقل (500) وحدة قرميد و(500) وحدة آجر، باقي الحيز المتبقي في الفرن يمكن ملؤه إما بالقرميد أو الآجر بدون فرق.

المرحلة D: النقل: بعد التسخين كل وحدة قرميد تزن (0,5 كغ)، وكل وحدة آجر تزن (2 كغ) وطاقة النقل القصوى التي يتوفر عليها المصنع لنقل المنتوجات إلى مكان البيع هي: 7000 كغ.

المرحلة E: مرحلة البيع. ثمن بيع كل وحدة من القرميد هي (0,45 و.ن) وثمن بيع الوحدة من الآجر هو (0,3 و.ن). المصنع يبحث عن الكميات من الآجر والقرميد التي يجب إنتاجها من أجل تعظيم رقم مبيعاته.

المطلوب:

كون النموذج الخطي الخاص بنشاط المصنع، الذي يسمح له بتعظيم رقم مبيعاته في حدود إمكانيات النشاط المتاحة له.

الجواب:

$$\text{Max } Z = 0{,}45\,X_1 + 0{,}3X_2$$
$$2X_1 + X_2 \leq 10000$$
$$X_1 + X_2 \leq 5500$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 8000$$
$$X_1 \geq 500\ ,\ X_2 \geq 500$$
$$0{,}5X_1 + 2X_2 \leq 7000$$

تمرين3:

ربة بيت تريد تحضير طبق أكل انطلاقا من اللحم والخضر الطازجة، وهذا الطبق يلزم أن يحتوي على الأقل على: 3000 حريرة، 2000 غ بروتين، 0,5 غ كالسيوم، 15ملغ حديد و 10 وحدات من فيتامين A، كما لا يجب أن تتعدى عدد الحريرات في الطبق 6000 حريرة. الخصائص الغذائية للحم والخضر معطاة كما يلي:

	1 وحدة وزنية من اللحم	1 وحدة وزنية من الخضر
الحريرات	3000ح	2000ح
البروتين	350غ	100غ
الكالسيوم	2,5غ	0غ
الحديد	10ملغ	30ملغ
فيتامين A	50 وحدة	4 وحدات

مع العلم أن ثمن شراء كل وحدة وزنية من اللحم 10 =و.ن، وثمن شراء كل وحدة وزنية من الخضر2 =و.ن. كون النموذج الخطي الذي يسمح لربة البيت بتحقيق برنامجها الغذائي بأقل تكلفة شراء ممكنة.

الجواب:

$\text{Min } Z = 10X_1 + 2X_2$

$3000X_1 + 2000X_2 \geq 3000$

$3000X_1 + 2000X_2 \leq 6000$

$350X_1 + 100X_2 \geq 200$

$2,5X_1 \geq 0,5$

$10X_1 + 30X_2 \geq 15$

$50X_1 + 4X_2 \geq 10$

$X_j \geq 0$

تمرين 4:

من أجل إنتاج نوع معين من الفولاذ، يقوم مصنع ما بمزج الفولاذ العادي مع (3) مركبات كيميائية معينة (**P,L,K**) كمواد مساعدة، ومن أجل ضمان السير الحسن لبرنامجه الإنتاجي، يقوم المصنع بتحضير هذه المركبات الكيميائية الثلاثة في إحدى ورشاته انطلاقا من مادتين خامتين (A,B) اللتان يقوم بشرائهما. الخصائص التقنية لهذين المادتين هي:

	كل وحدة من المادة الخام A و B تحتوي على		الكمية الازم توفرها من المركبات الكيميائية K, P, L
	A	B	
المركبات الكيميائية المستخرجة: K, P, L	3	1	9
	2	1	8
	1	1	6

من أجل تحقيق برنامجه الإنتاجي يجب على المصنع إنتاج على الأقل (9) وحدات من المركب الكيميائي K، (8) وحدات من L و (6) وحدات من P . فإذا عرفنا أن ثمن شراء الوحدة من المادة الخام (A) هو (3 و.ن) وثمن شراء الوحدة من المادة الخام (B) هو (2 و.ن)، كون النموذج الخطي الخاص بنشاط المصنع المذكور، الذي يسمح له بتحقيق برنامجه الإنتاجي بأقل تكلفة ممكنة.

الجواب:

$\mathbf{Min\ Z = 3X_1 + 2X_2}$

$\mathbf{3X_1 + X_2 \geq 9}$

$\mathbf{2X_1 + X_2 \geq 8}$

$\mathbf{X_1 + X_2 \geq 6}$

$\mathbf{X_j \geq 0}$

تمرين5:

تقوم شركة إنتاج الآليات الصناعية بإنتاج نوعين من المنتجات (السيارات والشاحنات)، عملية الإنتاج تتم في أربعة مصانع ذات سعة (طاقة إنتاج) ثابتة هي: مصنع تجميع السيارات، مصنع تجميع الشاحنات، مصنع تجميع المحركات ومصنع تجميع الهياكل.

الجدول التالي يعطي القدرة الإنتاجية المستعملة في إنتاج سيارة وشاحنة واحدة في كل مصنع في الساعة الواحدة.

المصنع	القدرة الإنتاجية في الساعة	
	لكل سيارة	لكل شاحنة
تجميع السيارات	0,05	0
تجميع المحركات	0,02	0,033
تجميع الهياكل	0,033	0,025
تجميع الشاحنات	0	0,04

تحصل الشركة على ربح مقداره (300 و.ن) لكل سيارة و(250 و.ن) لكل شاحنة. تريد الشركة أن تحدد كميات الإنتاج المثلى من السيارات والشاحنات التي تسمح لها بتعظيم أرباحها. كون النموذج الخطي الخاص بنشاط الشركة.

الجواب:

$$\mathbf{Max\ Z = 300X_1 + 250X_2}$$

$$\mathbf{0,05X_1 \leq 1}$$

$$\mathbf{0,02X_1 + 0,03X_2 \leq 1}$$

$$\mathbf{0,033X_1 + 0,025X_2 \leq 1}$$

$$\mathbf{0,04X_2 \leq 1}$$

$$\mathbf{X_j \geq 0}$$

تمرين 6:

يريد أحد منتجي المثلجات تحضير مادة أولية مركبة من أجل استعمالها في إنتاج المثلجات والمرطبات. هذه المادة يجب أن تحتوي على 30كغ من الدهون، 20كغ من السكريات، 2 كغ من البروتين و60 كغ من الماء (1كغ = 1لتر).

من أجل تحضير هذه المادة المركبة، يقوم بشراء بعض المواد من السوق بالإضافة إلى استعمال الماء. قائمة المواد المشتراة، ونسبة المواد المركبة فيها وكذلك ثمن شراء هذه المواد معطاة في الجدول التالي:

	القشدة	صفار بيض طازج	الحليب	صفار بيض مجمد ومحلى	مستخلص السكر	الماء
الدهون	40%	20%	10%	15%	------	----
السكريات	0,5%	1%	4%	10%	65%	----
البروتين	3%	40%	20%	45%	------	----
الماء	45%	10%	60%	15%	30%	100%
ثمن الشراء	5 و.ن	7 و.ن	3 و.ن	4 و.ن	0,6 و.ن	----

المطلوب: كون النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح لهذا المنتج من تحقيق برنامجه الإنتاجي بأقل تكلفة.

الجواب:

$$Min\ Z = 5X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 4x_4 + 0,6x_5$$

$$0,4X_1 + 0,2X_2 + 0,1X_3 + 0,15X_4 = 30$$

$$0,005X_1 + 0,01X_2 + 0,04X_3 + 0,1X_4 + 0,65X_5 = 20$$

$$0,03X_1 + 0,4X_2 + 0,2X_3 + 0,45X_4 = 2$$

$$0,45X_1 + 0,1X_2 + 0,6X_3 + 0,15X_4 + 0,3X + X_6 = 60$$

$$X_j \geq 0$$

تمرين 7:

طلبت إحدى التعاونيات الفلاحية من أحد منتجي الأعلاف الحيوانية أن يزودها بعلف الأبقار، يحتوي القنطار الواحد منه على الأقل على 30% من البروتين و6% من الدهون.

من أجل تلبية طلب زبونها، تقوم المزرعة بشراء ثلاث منتجات فلاحية (الشعير، نبات الصويا والذرة)، ومزجها بطريقة معينة من أجل الحصول على العلف المذكور. ثمن شراء القنطار الواحد من الشعير، الصويا والذرة هو على التوالي: 20 و.ن، 30 و.ن، 25 و.ن، نسب العناصر الغذائية في المنتجات الفلاحية الثلاثة معطاة كالتالي:

العناصر الغذائية	الشعير	نبات الصويا	الذرة
البروتين	%14	%55	%45
الدهون	%4	%5	%15

المطلوب: تكوين النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح للمزرعة بتوفير الطلب المذكور بأقل تكلفة.

الجواب:

$$\text{Min } Z = 20X_1 + 30X_2 + 25X_3$$
$$X_1 + X_2 + X3 = 1$$
$$4X_1 + 5X_2 + 15X_3 \geq 6$$
$$14X_1 + 55X_2 + 45X_3 \geq 30$$
$$X_j \geq 0$$

تمرين 8:

يقدم أحد المطاعم إلى زبائنه طبق أكل يتكون من ثلاث أنواع من الأسماك (P_3 , P_2 , P_1)، يستطيع المطعم أن يقدم إما طبق أكل ثمنه يقدر بـ(8 و.ن) يحتوي على (5 وحدات من P_1)، (5 وحدات من P_2) و (1 وحدة من P_3)، أو يقدم طبق أكل ثمنه (6 و.ن) يحتوي على (3 وحدات من P_1)، (1 وحدة من P_2) و (3 وحدات من P_3). الكميات القصوى من الأنواع الثلاثة من الأسماك التي يستطيع المطعم توفيرها هي: P_1: 30 وحدة، P_2: 24 وحدة، P_3: **18** وحدة. كون النموذج

الرياضي الخطي الذي يسمح للمطعم بتعظيم مبيعاته في حدود الإمكانيات المتاحة لديه.

الجواب:

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 6X_2$$
$$5X_1 + 3X_2 \leq 30$$
$$5X_1 + X_2 \leq 24$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 18$$
$$X_j \geq 0$$

تمرين 9:

تقوم ورشة صناعية بتجميع ثلاث لعب (J_3 , J_2, J_1)، وتيرة الإنتاج في هذه الورشة كالتالي:

تجميع 40 لعبة في الساعة بالنسبة ل: J_1، 50 لعبة/ساعة بالنسبة ل: J_2 و25 لعبة في الساعة بالنسبة ل: J_3. عملية التجميع تقوم بها آلة واحدة طاقتها العملية القصوى هي: 300 ساعة/الشهر.

تتوقع الورشة أن لا تتعدى المبيعات الكميات التالية: 5000، 6000 و3000 وحدة/شهر من J_3 , J_2, J_1 على التوالي. من جهة أخرى فإن اللعب المنتجة تخضع لمراقبة الجودة من طرف أربع تقنيين، كل تقني يعمل 120 ساعة/شهر. عملية المراقبة تستغرق في المتوسط 6 دقائق، 4 دقائق ودقيقتين لكل وحدة من J_3 , J_2, J_1 على التوالي. الربح الذي تحصل عليه الورشة من بيع كل وحدة من J_3 , J_2, J_1 هو: 50 و.ن، 30 و.ن، 70 و.ن على التوالي. كون النموذج الرياضي الخطي الذي يسمح للورشة بتعظيم أرباحها في حدود الإمكانيات المتوفرة لديها.

الجواب:

$$\text{Max } Z = 50X_1 + 30X_2 + 70X_3$$

$$\frac{X1}{40} + \frac{X2}{50} + \frac{X3}{25} \leq 300$$

$$6X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 28800$$

$$X_1 \leq 5000 \;,\; X_2 \leq 6000 \;,\; X_3 \leq 3000$$

$$X_j \geq 0$$

تمرين 10:

أمام شركة الغزل والنسيج ثلاث طرق لإنتاج الأقمشة القطنية، الخصائص التقنية للإنتاج حسب الطرق الثلاثة هي كالتالي:

الطريقة الأولى: معالجة وإنتاج وحدة واحدة من القماش يتطلب 03 ساعات من وقت عمل الآلات و0,4 ساعة عمل من وقت اليد العاملة. الطريقة الثانية: معالجة وإنتاج وحدة واحدة من القماش يتطلب 2,5 ساعة من وقت عمل الآلات و0,5 ساعة عمل من وقت العمالة.

الطريقة الثالثة: كل وحدة قماش تتطلب لإنتاجها 5,25 ساعة من وقت عمل الآلات و0,35 ساعة عمل من وقت العمال.

أقصى عدد ساعات العمل للآلات الذي يمكن استخدامه هو (6000 ساعة/الأسبوع)، بينما أقصى وقت عمل متاح من اليد العاملة يمكن استخدامه في الإنتاج هو (600 ساعة/الأسبوع). الربح الذي تحصل عليه الشركة من بيع القماش حسب طرق الإنتاج الثلاثة هو على التوالي: 10 و.ن، 09 و.ن، 11 و.ن.

تريد الشركة أن تحدد الكميات من القماش التي يجب عليها إنتاجها حسب طرق الإنتاج الثلاثة التي تمكنها من تعظيم أرباحها. كون النموذج الرياضي الخطي الخاص بهذه المسألة.

الجواب:

$\text{Max } Z = 9X_1 + 10X_2 + 11X_3$

$3X_1 + 2,5X_2 + 5,25X_3 \leq 6000$

$0,4X_1 + 0,5X_2 + 0,35X_3 \leq 600$

$X_j \geq 0$

المبحث الثاني

الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية

هذه الطريقة تستعمل في حل مسائل البرمجة الخطية البسيطة نوعا ما، والتي تتضمن متغيرين مستقلين فقط. سنقوم بتوضيح خطوات الحل باستعمال هذه الطريقة عن طريق المثال الأول الذي تناولناه في بداية المبحث الأول والمتمثل في النموذج الخطي التالي:

$\max Z = 6X_1 + 7X_2$
$2X_1 + 3X_2 \leq 12$ ......(I)
$2X_1 + X_2 \leq 8$ ....(II)
$X_1 \geq 0 , \quad X_2 \geq 0$

المطلوب هو إيجاد الكميات X_2, X_1 اللازم إنتاجها من المنتجات (A_2, A_1) التي تسمح للمؤسسة بتعظيم أرباحها في حدود القيود الزمنية المفروضة على الآلات التي تستعملها في إنتاج المنتجين المذكورين.

الحل:

نقيس الكميات المنتجة (X_1) من المنتج A_1 على المحور الأفقي والكميات المنتجة (X_2) من المنتج A_2 على المحور الرأسي، ثم نرسم المستقيمات الممثلة لمعادلات القيود الفنية في المجال بين هذين المحورين. من أجل رسم هذه المستقيمات في المجال بين المحورين (X_2 , X_1) نقوم بتحديد نقاط تقاطعهما مع هذين المحورين وذلك بجعل $X_1 = 0$ أو $X_2 = 0$.

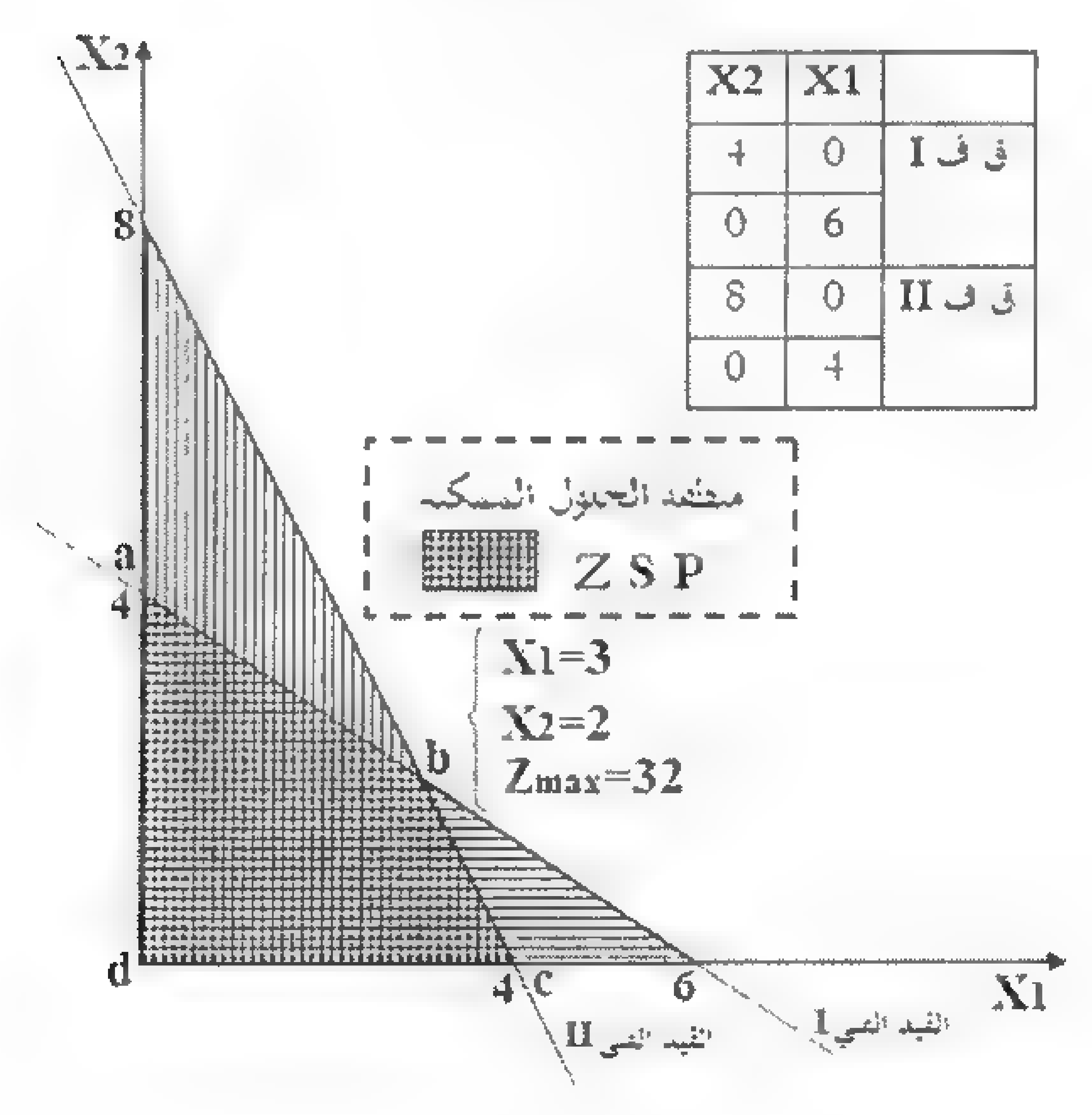
المستقيم (I) يمثل المعادلة الأولى التي بدورها تمثل المتراجحة الممثلة للقيد الفني الأول وهو يوضح عدد ساعات العمل القصوى المتاحة للآلة الأولى (الشكل1).

وبالتالي فكل النقاط المظللة بعلامة ////) والواقعة على أو أسفل المستقيم (I) تحقق المتراجحة الأولى الممثلة للقيد الفني الأول.

بمعنى أن كل كميات الإنتاج من المنتجين (X_1 وX_2) الواقعة على أو أسفل المستقيم (I)، هي تقع في حدود الإمكانيات الزمنية للآلة الأولى وبالتالي فهي تستطيع المساهمة في إنتاجها. وبنفس الطريقة نرى أن المستقيم (II) يمثل المتراجحة الثانية الممثلة للقيد الفني الثاني الذي يعكس عدد ساعات العمل القصوى المتاحة للآلة الثانية. ومن هنا فكل كميات الإنتاج من المنتجين (X_1 وX_2) الواقعة على أو أسفل هذا المستقيم والمظللة بواسطة (--) تستطيع الآلة الثانية إنتاجها.

هناك أيضا القيدين ($X_1 \geq 0$ و $X_2 \geq 0$) وهو يعني أنه لا يمكن أن نحصل على إنتاج بكميات سالبة.

رسم شكل رقم 1

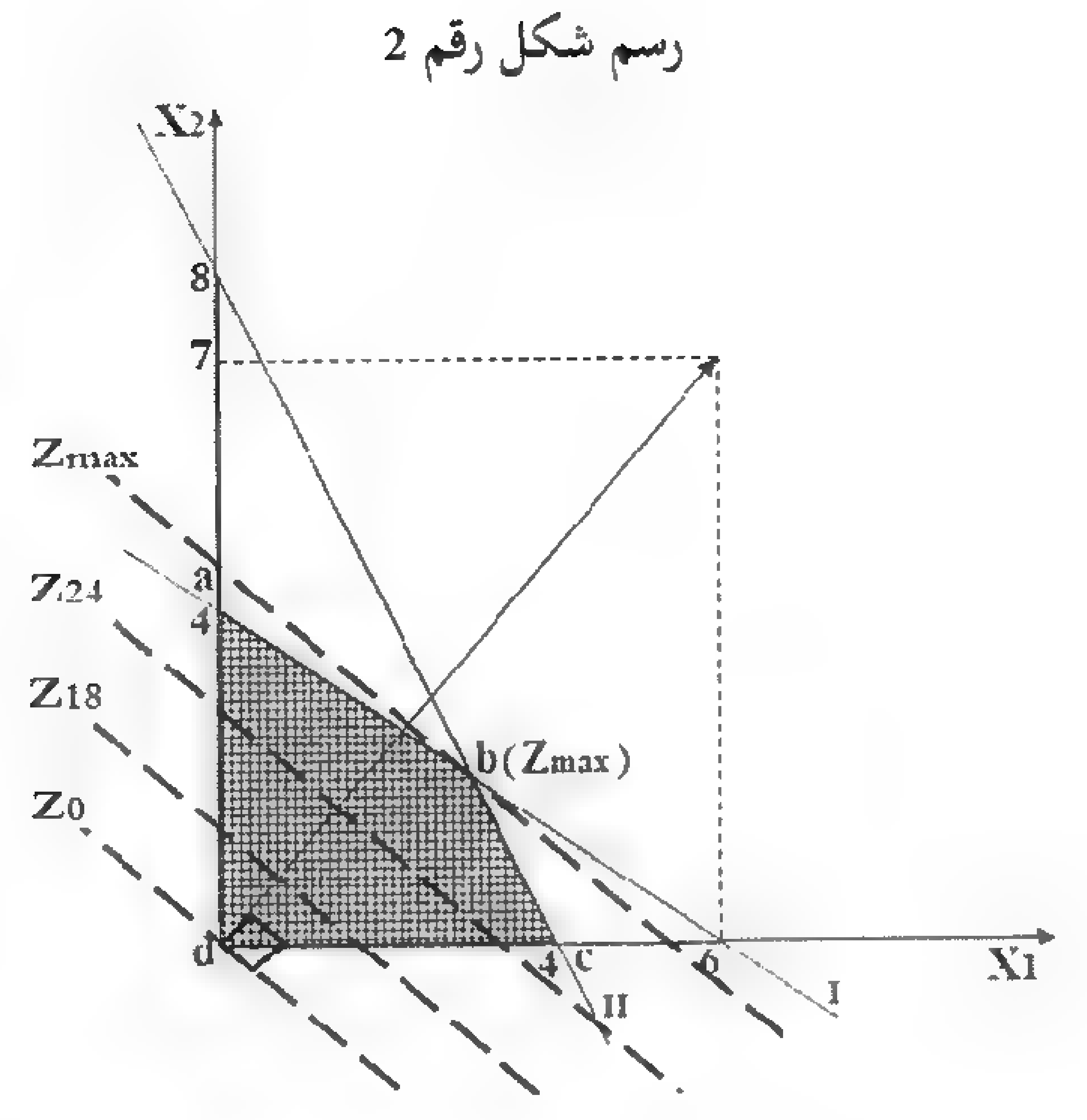


من الرسم البياني السابق نلاحظ أن النقاط (النسب) التي تحقق كـل القيـود الفنية مـع بعض هي المنطقة المظللة الموضحة بالمجـال (a, b, c, d) وتسمى بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة النشاط الممكن (Zone des solutions possibles)، أي أن كميات الإنتاج من المنتجين المذكورين التي تقع في حدود هذه المنطقة هي تقع في حدود الإمكانيات الزمنية للآلتين المستعملتين في الإنتاج مع بعض. إن إيجاد منطقة الحلول الممكنة هو خطوة أساسية من أجل حل النموذج الخطي لكنها غير كافية، فحل النموذج يتمثل في إيجاد حله الأمثل، وهو ذلك الحل الذي يحقق القيود الفنية مع بعض (أي ينتمي إلى منطقة الحلول الممكنة) وفي نفس الوقت يعطي أعظم (أكبر) قيمة لدالة الهدف (Z). بعبارة أخرى فإن مستوى الإنتاج الذي يعظم دالة الهدف يجب أن نبحث عليه داخل منطقة الحلول الممكنة وليس خارجها.

وكميات الإنتاج (X_2 , X_1) الواقعة في منطقة الحلول الممكنة والتي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف Z هي أعلى نقطة في هذه المنطقة (النقطة التي لها أكبر الإحداثيات). وواضح من الرسم أن هذه النقطة هي النقطة (b)، الناتجة عن تقاطع المستقيمين (I و II). ومن أجل إيجاد إحداثيات هـــذه النقـطة نحـل معادلتي المستقيمين آنيا، فنحصـل علـى قيـمة $X_1 = 3$ وحدات و $X_2 = 2$ وحدة. هذه هي قيم X_2 , X_1 التي تعطي لـ Z أكبر قيمة ممكنة، أي أن هذه هي الكميات من المنتجين (A_1, A_2) التي يلزم على المؤسسة إنتاجها من أجل تعظيم أرباحها في حدود القيود الفنية المفروضة عليها(الموارد المتاحة لها). قيمة الربح الأقصى الممكن الحصول عليها في هذه الحالة هي $Z_{max} = 7.2 + 6.3 = 32$ وحدة نقدية.

هناك طريقة أخرى تستعمل أيضا في تحديد الحل الأمثل في منطقة الحلول الممكنة، وتتمثل في إعطاء عدة قيم عشوائية لدالة الهدف (من الصغيرة إلى الكبيرة) وبناءا عليها نرسم عدة مستقيمات متوازية لدالة الهدف انطلاقا من نقطة الصفر، أي ننتقل من مستوى ربح إلى مستوى آخر أعلى، ونستمر في الارتفاع مادام المستقيم الممثل لدالة الهدف يقع داخل منطقة الحلول الممكنة، لأن هذا يعني أنه مازال هناك نقاط أخرى تعطي لدالة الهدف قيمة أكبر. حتى نصل إلى مستوى الربح أين يصبح المستقيم الممثل لدالة الهدف يمس منطقة الحلول الممكنة من أعلى، وفي هذه الحالة فإننا لا نستطيع أن نرتفع أكثر لأننا نخرج من منطقة الحلول الممكنة. وتكون إحداثيات نقطة التماس من أعلى بين منطقة النشاط الممكن والمستقيم الممثل لدالة الهدف هي قيم (X_1 وX_2) التي تعظم دالة الهدف مع شرط الالتزام بالقيود الفنية. ففي المثال السابق إذا أعطينا لـ(Z) قيمة (18) مثلا، أي أن: $6X_1 + 7X_2 = 18$ ، ورسمنا هذا المستقيم نلاحظ أنه يقع داخل منطقة الحلول الممكنة وكل النقاط الواقعة عليه تعطي مستوى ربح18 = و.ن. مادام المستقيم الممثل لدالة الهدف في هذه الحالة يمر داخل منطقة الحلول الممكنة، فهذا يدل على أن مستوى الربح (18 و.ن) لازال دون مستوى الإمكانيات المتوفرة للمؤسسة. ولكن إذا أعطينا لـ Z قيمة تساوي 24 و.ن مثلا فتكون دالة الهدف هي $24 = 6X_1 + 7X_2$ وهي تمثل مستوى ربح أعلى من السابق، وبرسم هذا المستقيم نلاحظ أنه يقع أيضا داخل منطقة الحلول الممكنة بالرغم من أنه يمثل مستوى ربح أكبر، وبالتالي لا زلنا دون مستوى النشاط الأمثل.

رسم شكل رقم 2



ونستمر في دراسة الخطوط المتوازية لخط $Z = 18$، الممثلة لمستقيم دالة الهدف، حتى نصل إلى المستقيم $\mathbf{Z = 32}$. وعند رسمه نجده يتماس في نقطة واحدة من أعلى مع منطقة الحلول الممكنة (a , b , c , d)، هذه النقطة هي الموقع الهندسي للحل الأمثل. إحداثيات نقطة التماس هذه هي النقطة: $(X_1 = 3)$، $(X_2 = 2)$ وتكون عندها$\mathbf{Z_{max} = 32}$ وحدة نقدية.

مثال2:

ليكن النموذج الخطي التالي:

$\max Z = 5X_1 + 3X_2$

$3X_1 + 5X_2 \leq 15$

$5X_1 + 2X_2 \leq 10$

$X_1 \geq 0,$
$X_2 \geq 0$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذا النموذج باستعمال الطريقة البيانية.

الحل:

– نرسم معادلتي المستقيمين الممثلين للقيود الفنية في المجال بين المحورين (X_2 , X_1).

– نحدد المنطقة الهندسية التي يتحقق فيها كل قيد فني لوحده.

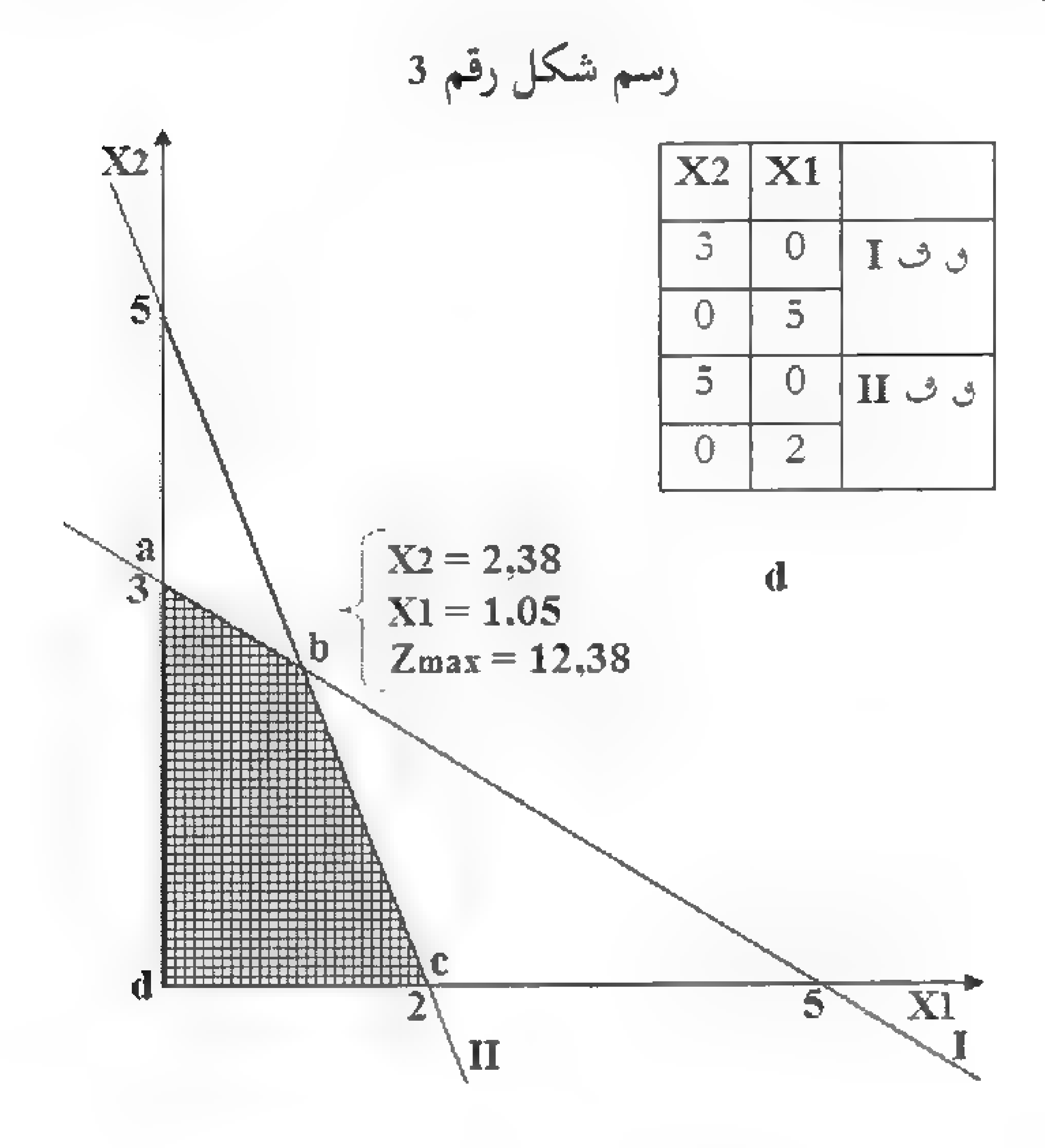
– ثم نحدد بعد ذلك المنطقة أو المجال الذي يتحقق فيه كل القيود الفنية مع بعض (تحديد منطقة الحلول الممكنة).

نلاحظ من الرسم أن المنطقة المظللة (a , b , c , d) هي التي تحقق القيود الفنية كلها مع بعض، وبالتالي فهي منطقة الحلول الممكنة. الآن نبحث في داخل منطقة الحلول الممكنة عن الحل الأمثل، المتمثل في تحديد قيم (X_2 , X_1) التي تعطي لـ (Z)قيمة مثلى. تحديد موقع هذه القيمة يعتمد مبدئيا على مقياس الأمثلة لدالة الهدف، ففي حالة دالة الهدف Max نبحث عن مكان الحل الأمثل في أعلى منطقة الحلول الممكنة وعلى اليمين منها، وفي حالة Min نتجه بالعكس إلى أدنى جهة في منطقة الحلول الممكنة.

نحن نبحث في النموذج المعطى عن تعظيم دالة الهدف، فنلاحظ أن أعلى قيمة في منطقة الحلول الممكنة (a , b , c , d) هي النقطة (b)، وإحداثياتها نجدها بحل معادلتي المستقيمين آنيا. وبالتعويض نجد أن قيمة **$X_1 = 1,05$** وحدة وقيمة **$X_2 = 2,38$** وحدة. وتكون قيمة (Z) العظمى هي (12,38) و.ن.

ونستطيع رسم معادلة مستقيم دالة الهدف $Z=5X_1+3X_2=12,38$ على نفس الإحداثيات فيعطينا:

رسم شكل رقم 3



X2	X1	
3	0	ق و I
0	5	
5	0	ق و II
0	2	

مثال3: ليكن النموذج الخطي التالي:

$$F.b : \max Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$6X_1 + 2X_2 \geq 8$$

$$X_1 + 5X_2 \geq 4$$

$$X_1 \leq 3\ ,\ \ X_2 \leq 3$$

$$X_j \geq 0$$

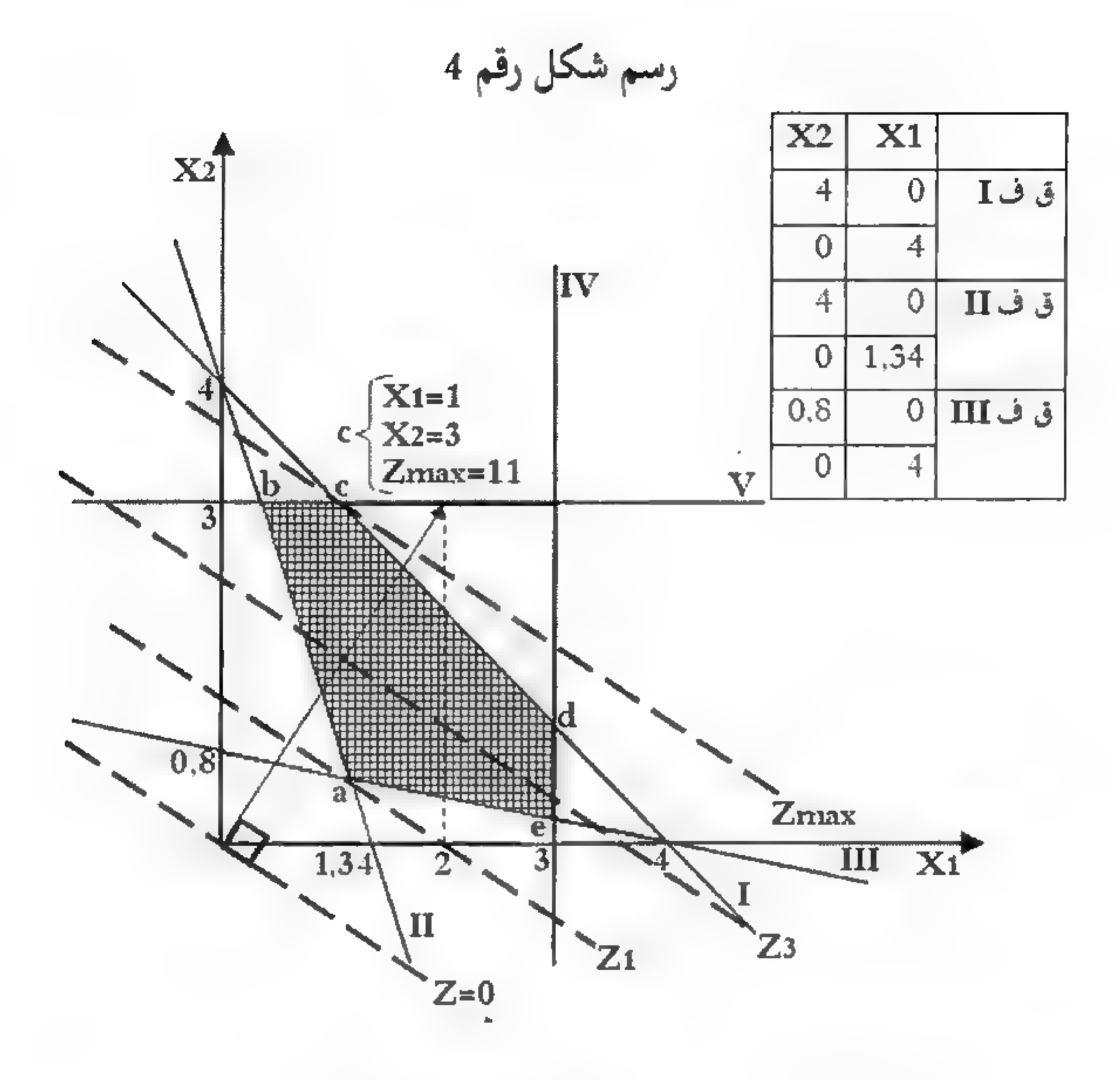
.المطلوب حل هذا النموذج الخطي باستعمال الطريقة البيانية

الحل: نقوم برسم معادلات المستقيمات الممثلة للقيود الفنية على المحورين الممثلين لكميات (X_1, X_2)، ثم نحدد منطقة تحقق كل قيد فني لوحده وبعدها نوضح منطقة الحلول الممكنة.

بالنسبة للمستقيم الأول (I) نلاحظ أن كل النقاط الواقعة عليه أو أسفله تحقق القيد الفني الأول (المتراجحة الأولى) ، وكل النقاط الواقعة على أو فوق المستقيم (II) تحقق القيد الفني الثاني (المتراجحة II)، بينما النقاط الواقعة فوق أو أعلى المستقيم (III) فتحقق القيد الفني (III) والنقاط الواقعة على أو يسار المستقيم (IV) تحقق القيد الفني (IV) وأيضا كل النقاط الواقعة على أو أسفل المستقيم (V) تحقق القيد الفني (V). بالتمعن في هذا الرسم وأخذ المجال الذي يتحقق فيه كل قيد فني، نلاحظ أن المجال الهندسي الذي يحقق (تلبي فيه) كل القيود الفنية مع بعض هو المنطقة المظللة: (c , d , c , b , a) وهي إذن منطقة الحلول الممكنة. مادام أن شرط الأمثلية هنا بالنسبة لدالة الهدف هو (max)، فالحل الأمثل المطلوب منا إيجاده هو الذي يحقق القيود الفنية مع بعض وفي نفس الوقت يعطي أعظم قيمة ممكنة لـ (Z). بالنظر إلى منطقة الحلول الممكنة نلاحظ أن النقطتين (c) و(b) هما أعلى نقطتين في منطقة الحلول الممكنة، ولكن لسنا متأكدين أيهما تعطي لدالة الهدف قيمتها العظمى.

إذا ما اتبعنا المنهج الجبري، فنحاول أن نجد إحداثيات النقطة (b) وأيضا إحداثيات النقطة (c) ثم نعوضهما في دالة الهدف لنحدد أي منهما يعطي لدالة الهدف القيمة العظمى، ويتضح أن النقطة (c) هي التي تعطي لـ Z أعظم قيمة تساوي 11.

رسم شكل رقم 4



X2	X1	
4	0	ق ف I
0	4	
4	0	ق ف II
0	1,34	
0,8	0	ق ف III
0	4	

يمكن أن نتبع المنهج الهندسي وذلك بإعطاء دالة الهدف قيمة صفر ورسمها، وذلك من أجل تحديد موقعها على الرسم بالضبط. من أجل تحديد هذا الموقع نأخذ معاملات دالة الهدف وهي (3 , 2) ونحدد نقطة التقاءهما، ثم نرسم شعاع ينطلق من نقطة بداية الإحداثيات في اتجاه هذه النقطة، نرسم بعدها مستقيما عموديا على هذا الشعاع فيكون هو المستقيم الممثل لدالة الهدف عندما تساوي الصفر، ويوضح لنا الشعاع اتجاه تحرك دالة الهدف. عندئذ يتضح لنا، لو أعطينا قيما متزايدة لدالة الهدف ورسمناها، أنها تتجه مباشرة إلى النقطة (c) التي يوجد عندها الحل الأمثل

(max Z = 11). يمكن أن نتبع هذا المنهج الهندسي في حالة ما إذا كان معيار الأمثلية لدالة الهدف min أيضا.

تمارين على حل النماذج الخطية باستعمال الطريقة البيانية

1) **max $Z = 2X_1 + 5X_2$**

$4X_1 + 3X_2 \geq 12$

$-X_1 + 2X_2 \leq 6$

$2X_1 - X_2 \leq 4$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 4{,}67$, $X_2 = 5{,}34$ max $Z = 36$

2) **max $Z = 3X_1 + 5X_2$**

$X_1 \leq 4000$

$X_2 \leq 5000$

$X_1 + 2/3X_2 \leq 6000$

$X_j \geq 0$

Rép: **$X_1 = 2666{,}67$, $X_2 = 5000$**

max $Z = 33000$

3) **max $Z = 2{,}5X_1 + X_2$**

$3X_1 + 5X_2 \leq 15$

$5X_1 + 2X_2 \leq 10$

$X_j \geq 0$

Rép: نصف قطعة مستقيمة محصورة بين

A(**X_1=1,05, X_2=2,37**)

B(**X_1=2, X_2=0**)

max $Z = 5$

4) **max $Z = 3X_1 + 4X_2$**

$5X_1 + 4X_2 \leq 200$

$3X_1 + 5X_2 \leq 150$

$5X_1 + 4X_2 \geq 100$

$8X_1 + 4X_2 \geq 80$

$X_j \geq 0$

Rép: **$X_1 = 30{,}77$, $X_2 = 11{,}54$**

max $Z = 126{,}92$

5) **max $Z = 2X_1 + 5X_2$**

$X_1 + 3X_2 \leq 16$

$4X_1 + X_2 \leq 20$

$X_1 \leq 4$

$Xj \geq 0$

Rép: **$X_1 = 4$, $X_2 = 4$**

max $Z = 28$

6) **max $Z = 500X_1 + 250X_2 - 500000$**

$4X_1 + 3X_2 \leq 9000$

$4X_1 + 6X_2 \leq 15000$

$X_1 \geq 500$

$X_2 \geq 1000$

Rép: $X_1 = 1500$, $X_2 = 1000$

max $Z = 500000$

7) **max $Z = X_1 + X_2$**

$-X_1 + X_2 \leq 1$

$X_1 - 2X_2 \leq 1$

$X_i \geq 0$

Rép: max $Z = \infty$

8) $\min Z = 6X_1 + 5X_2$

$2X_1 + X_2 \geq 5$

$3X_1 + 4X_2 \geq 9$

$X_i \geq 0$

Rép: $X_1 = 2,2$, $X_2 = 0,6$

$\min Z = 16,5$

9) $\min Z = 10X_1 + 2X_2$

$3000X_1 + 2000X_2 \geq 3000$

$350X_1 + 100X_2 \geq 200$

$X_1 \geq 0,2$

$10X_1 + 30X_2 \geq 15$

$X_2 \geq 0$

Rép: $X_1 = 0,2$, $X_2 = 1,3$

$\min Z = 4,6$

10) $\max Z = 0,45X_1 + 0,3X_2$

$2X_1 + X_2 \leq 10000$

$X_1 + X_2 \leq 5500$

$X_1 + 2X_2 \leq 8000$

$0,5X_1 + 2X_2 \leq 7000$

$X_1 \geq 500$, $X_2 \geq 500$

Rép: $X_1 = 4500$, $X_2 = 1000$

$\max Z = 2325$

11) $\max Z = X_1 + X_2$

$3/4X_1 + X_2 \geq 3$

$X_1 + X_2 \leq 1$

$0 \leq X_2 \leq 1$

$X_1 \geq 0$

Rép: $\max Z = \emptyset$

12) $\max Z = 8X_1 + 9X_2$

$3X_1 + 6X_2 \leq 18$

$7X_1 + 4X_2 \leq 28$

$8X_1 + 9X_2 \leq 36$

$X_j \geq 0$

Rép: نصف قطعة مستقيمة محصورة بين

A(**X_1=3,5, X_2=0,9**)

B(**X_1=102,6, X_2=1,72**)

$\max Z = 36$

13) $\min Z = X_1 + X_2$

$2X_1 - X_2 \geq 2$

$-X_1 + 2X_2 \geq 2$

$-X_1 + 2X_2 \leq 5$

$X_1 - X_2 \leq 1$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 2$, $X_2 = 2$

$\min Z = 4$

14) $\min Z = 12X_1 + 15X_2$

$0,15X_1 + 0,3X_2 \geq 60$

$0,2X_1 + 0,1X_2 \geq 40$

$0,05X_1 + 0,25X_2 \geq 50$

$X_j \geq 0$

Rép: **$X_1 = 133,34$, $X_2 = 133,34$**

$\min Z = 3600,18$

15) $\max Z = 5X_1 + 2X_2$

$-X_1 + X_2 \leq 3$

$4X_1 + 5X_2 \leq 51$

$2X_1 - 5X_2 \leq 3$

$X_1 + X_2 \geq 5$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 9, X_2 = 3$

$\max Z = 51$

16) $\max Z = X_1 + 2X_2$

$X_1 + X_2 \geq 6$

$-X_1 + X_2 = 3$

$X_1 \leq 1$

$X_j \geq 0$

Rép: $\max Z = \emptyset$

17) $\max Z = 3X_1 + 4X_2$

$-X_1 + X_2 \leq 1$

$X_1 - X_2 \leq 1$

$-X_1 - X_2 \leq 1$

$-X_1 + X_2 \leq 2$

$2X_1 - X_2 \leq 2$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 2, X_2 = 2$

$\max Z = 14$

18) $\max Z = 2X_1 + X_2$

$X_1 - X_2 \leq 3$

$X_1 + 2X_2 \leq 6$

$-X_1 + 2X_2 \leq 2$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 4, X_2 = 1$

$\max Z = 9$

19) $\max Z = X_1 + X_2$

$3X_1 + 5X_2 \leq 15$

$-X_1 + X_2 \leq 2$

$10X_1 + 7X_2 \leq 35$

$X_1 + X_2 \geq 1$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 2{,}41, X_2 = 1{,}55$

$\max Z = 3{,}97$

20) $\max Z = 700X_1 + 200X_2$

$2X_1 + 5X_2 \leq 50$

$X_1 \leq 15$

$X_2 \leq 8$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 15, X_2 = 4$

$\max Z = 11300$

21) $\max Z = X_1 + 2X_2$

$-X_1 + 2X_2 \geq 2$

$X_1 + X_2 \geq 4$

$X_1 - X_2 \leq 2$

$X_2 \leq 6$, $X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 8, X_2 = 6$

$\max Z = 20$

22) $\max Z = X_1 + 2X_2$

$-X_1 + 2X_2 \leq 4$

$-X_1 + X_2 \leq 1$

$X_1 - 4X_2 \leq 4$

$X_j \geq 0$

Rép: $\min Z = \infty$

23) **$\max Z = X_1 + 2X_2$**

$-2X_1 + X_2 \leq 2$

$-X_1 + 2X_2 \leq 5$

$X_1 - 4X_2 \leq 4$

$X_j \geq 0$

Rép: $\max Z = \infty$

24) **$\max Z = X_1 + X_2$**

$2X_1 - 3X_2 \leq 2$

$2X_1 + X_2 \leq 11$

$-X_1 + X_2 \leq 3$

$X_1 \leq 4$, $X_2 \leq 5$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 3, X_2 = 5$

$\max Z = 8$

25) **$\min Z = 2X_1 + 3X_2$**

$-2X_1 + 3X_2 = 3$

$4X_1 + 5X_2 \geq 10$

$X_1 + 2X_2 \leq 5$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0{,}68, X_2 = 1{,}45$

$\min Z = 5{,}73$

26) **$\max Z = X_1 + X_2$**

$-3X_1 + 2X_2 \leq 1$

$X_1 + 2X_2 \leq 14$

$2X_1 + X_2 \leq 13$

$3X_1 - X_2 \leq 12$

$X_j \geq 0$

Rép:

27) **$\max Z = 10X_1 + 5X_2$**

$14X_1 + 5X_2 \leq 350$

$14X_1 + 8X_2 \geq 392$

$6X_1 + 12X_2 \leq 408$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 20, X_2 = 14$

$\max Z = 270$

28) **$\max Z = -3X_1 + 6X_2$**

$-2X_1 - 3X_2 \leq 1$

$2X_1 + X_2 \geq 4$

$-X_1 + X_2 \leq 1$

$-X_1 + 4X_2 \leq 13$

$4X_1 - X_2 \leq 23$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 3, X_2 = 4$

$\max Z = 15$

29) **$\max Z = X_1 + X_2$**

$X_1 - X_2 \leq 3$

$X_1 + X_2 \geq 5$

$2X_1 - 3X_2 \leq 6$

$X_2 \leq 6$, $X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 9, X_2 = 6$

$\max Z = 15$

30) $\max Z = 4X_1 + 6X_2$

$3X_1 + X_2 \geq 9$

$X_1 + 2X_2 \geq 8$

$X_1 + 6X_2 \geq 12$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 2, X_2 = 3$

$\max Z = 26$

المبحث الثالث

طريقة السمبلكس (Simplex) في حل مسائل البرمجة الخطية

لقد رأينا سابقا أن الطريقة البيانية تستعمل بالخصوص في حل النماذج التي لا تتعدى عدد المتغيرات فيها اثنين، فإذا ما أصبح عدد المتغيرات في النموذج الخطي أكثر من ذلك فإنه يصعب رسم معادلات القيود الفنية بيانيا. وحتى من الناحية الجبرية، فإنه عندما يصبح عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات فإنه يتعقد عمليا حل هذا النوع من النماذج بيانيا.

لذلك ظهرت إلى الوجود طريقة الـ Simplex لتسهيل إيجاد حل للنماذج الخطية التي يصعب حلها بالطريقة البيانية، وطريقة السمبلكس ما هي إلا تعميم للطريقة البيانية، حيث رأينا أنه في هذه الطريقة، الحل الأمثل يقع في أحد أركان منطقة الحلول الممكنة، وتقوم طريقة السمبلكس بفحص هذه الأركان بطريقة منظمة للوصول إلى ذلك الحل الأمثل.

عرض خطوات هذه الطريقة:

أولا: حل النماذج الخطية من الشكل:

$$(opt)\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$$

$$X_j \geq 0 \ , \ b_i \geq 0$$

$$i = 1, \ldots\ldots, m$$

من أجل حل أي نموذج خطي الذي تكون كل قيوده الفنية من الشكل أصغر أو تساوي (≤) يجب إتباع الخطوات التالية:

I – استعمال طريقة الـ **Simplex** يتطلب تحويل قيود أي نموذج خطي من شكل متراجحات (متباينات) إلى شكل معادلات (مساواة)، ولتحويل أي نموذج خطي

من شكل لا مساواة إلى مساواة نفترض متغيرات جديدة، نسميها متغيرات الفرق (Les variables d'ecart) ونرمز لها مثلا بالرمز (S_i).

فإذا كان الطرف الأيسر من القيد الفني أصغر أو يساوي الطرف الأيمن وهو (b_i): $(\sum a_{ij}X_j \leq b_i)$، فإنه لكي يصبح الطرفان متساويان يلزم أن نضيف إلى الطرف الأيسر متغير الفرق (S_i)، أي: $\sum a_{ij} X_j + S_i = b_i$، وبالتالي فإن النموذج الخطي من الشكل:

$(opt)\ Z = \sum C_jX_j$		$(opt)\ Z = \sum C_jX_j$
$\sum a_{ij}X_j + S_i = b_i$	يتحـول إلـــى	$\sum a_{ij}X_j \leq b_i$
$X_j \geq 0\ ,b_i \geq 0\ ,S_i \geq 0$		$X_j \geq 0\ ,\ b_i \geq 0$
$i = 1,......,m$		$i = 1,......,m$

متغيرات الفرق (S_i) هذه تمثل الموارد العاطلة، أي الموارد التي لم أو لازالت لم تستعمل بعد.

وحتى تصبح كل المتغيرات ممثلة في جميع معادلات النموذج الخطي فإننا نضيف متغيرات الفرق بمعامل صفر إلى دالة الهدف، فهذه المتغيرات لا تضيف أي شيء إلى دالة الهدف وبالتالي فمعاملاتها فيها تساوي الصفر، لأن هذه المتغيرات غير ممثلة أصلا في دالة الهدف.

وتصبح دالة الهدف كالتالي:

$$\textbf{opt } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j + 0S_1 + 0S_2 + \dots\dots\dots + 0S_m$$

II- الخطوة الثانية هي تمثيل كل المعلومات الخاصة بالنموذج الخطي في الجدول التالي:

	متغيرات الفرق	المتغيرات الأساسية (متغيرات القرار)	دالة الهدف	
الحل	$S_1, S_2, \dots, S_m$	$X_1, X_2, \dots, X_n$	متغيرات دالة الهدف	
	$0, 0, \dots, 0$	$-C_1, -C_2, \dots, -C_n$	معاملات متغيرات دالة الهدف	
				متغيرات قاعدة الحل
b_1 b_2 ... b_m	$1, 0, 0, \dots, 0$ $0, 1, 0, \dots, 0$ .... $0, 0, \dots, 1$	$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$ .... $a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$	معاملات متغيرات القيود الفنية	↓ S_1 S_2 .... S_m

ملاحظة: في هذا الجدول معاملات متغيرات دالة الهدف تؤخذ بالسالب $(-C_n, \dots\dots, -C_2, -C_1)$ لتساعدنا فيما بعد على تتبع الحل الأمثل للنموذج الخطي.

III- الخطوة الثالثة تتمثل في البحث عن حل للنموذج:

يتكون هذا الحل من مرحلتين: المرحلة الأولى وهي البحث عن حل ابتدائي للنموذج المطروح، والمرحلة الثانية (وهي التي تهمنا) وتتمثل في البحث عن حل أمثل لهذا النموذج.

المرحلة الأولى: يعني الحل الابتدائي البحث عن القاعدة التي ننطلق منها في البحث عن حل أمثل، وهي تعني بالنسبة للنشاط الاقتصادي تلك المرحلة التي تكون فيها المؤسسة الاقتصادية قد أعدت كل وسائل الإنتاج المطلوبة لممارسة نشاطها لكنها لازالت لم تبدأ بعد في ممارسة هذا النشاط. فإذا كانت المؤسسة لازالت لم تبدأ بعد في ممارسة نشاطها، فهذا يعني أن مؤشرات هذا النشاط (مؤشرات القرار) هي عند المستوى صفر $(X_1 = 0 , X_2 = 0 , \dots X_n = 0)$، أي أننا نجعل عَدّاد النشاط عند

المستوى صفر. فإذا كانت مؤشرات القرار في دالة الهدف تساوي الصفر ومتغيرات الفرق معاملاتها هي صفر، فإن دالة الهدف في هذه الحالة تساوي صفر وهي تتناسب مع مرحلة ما قبل بداية النشاط.

بالنسبة للقيود الفنية، إذا كانت متغيرات القرار تساوي صفر، فعند ضربها في معاملاتها، تكون المحصلة كلها صفر وتبقى متغيرات الفرق وهي $(S_m, \ldots, S_2, S_1)$ تساوي كمية الموارد المتوفرة وهي $(\mathbf{b}_m, \ldots, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1)$.

فإذا كان النموذج الخطي معبر عليه كالتالي:

$$optZ = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \ldots + 0S_m$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n + S_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n + S_2 = b_2 \\ \ldots \\ a_{1m}X_1 + a_{2m}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n + S_m = b_m \end{cases}$$

واعتبرنا أن مؤشرات النشاط $(X_j= 0)$ تساوي الصفر ومتغيرات الفرق معاملاتها في دالة الهدف تساوي صفر، فإن النموذج السابق يصبح كالتالي:

$$S_1=b_1$$
$$S_2 = b_2$$
$$\ldots$$
$$S_m = b_m$$

هذا هو **الحل الابتدائي** لهذا النموذج والذي يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط.

قبل المرور إلى مرحلة البحث عن **الحل الأمثل**، يجب التأكد من أن الحل الابتدائي **مقبولا**، وهناك شرطين أساسيين يجب أن يتوفرا في الحل الابتدائي حتى يكون مقبولا.

شروط قبول الحل الابتدائي:

– أن تكون دالة الهدف عند المستوى صفر (وهي قيمة تتناسب مع مرحلة ما قبل أن تبدأ المؤسسة نشاطها).

– أن تكون معاملات متغيرات الحل الابتدائي $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ أحادية موجبة في القيود الفنية، بمعنى أن تكون هذه المعاملات في ما بينها مصفوفة وحدة:

$$\begin{bmatrix} S1 \\ S2 \\ . \\ . \\ . \\ Sm \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ . \\ . \\ . \\ bm \end{bmatrix}$$

IV - الخطوة الرابعة: تتمثل في البحث عن الحل الأمثل، حيث نبدأ في تجريب متغيرات القرار وذلك بإدخالها واحدا بعد الآخر إلى قاعدة الحل في مكان متغيرات الحل الابتدائي ونرى مدى تأثيرها على تحسين دالة الهدف (opt Z). ومتغير القرار الذي ندخله قبل غيره في قاعدة الحل هو الذي يكون معامله في دالة الهدف هو أصغر قيمة سالبة من غيره من المتغيرات (أنظر السطر العلوي الثاني من الجدول السابق)، فنحن نختار للإدخال دائما المتغير الذي يكون معامله في سطر معاملات دالة الهدف يساوي أصغر قيمة سالبة إذا ما كنا بصدد البحث عن تعظيم دالة الهدف (**max Z**)، أو الذي يكون معامله يساوي أكبر قيمة موجبة إذا ما كنا بصدد البحث عن تدنية دالة الهدف (**min Z**).

V– الخطوة الخامسة: إن إدخال متغير ما إلى قاعدة الحل يفرض علينا إخراج متغير آخر من متغيرات الحل الابتدائي وهي: $(S_m, \dots\dots, S_2, S_1)$.

لكي نحدد ما هو المتغير الذي يلزم أن نخرجه من قاعدة الحل نقوم بتقسيم قيم عمود الموارد ($b_m, ..., b_2, b_1$) على **معاملات** متغير القرار الذي اخترناه للدخول في قاعدة الحل (معاملات هذا المتغير في القيود الفنية) بمعنى:

$b_m/a_{mj}, ...,b_2/a_{2j}, b_1/a_{1j}$.

نخرج متغير القاعدة (متغير الحل الابتدائي) $S_m, ..., S_2, S_1$ الذي تقابله أقل قيمة **غير سالبة** من بين القيم السابقة، أي أننا نأخذ **min** (b_i/a_{ij}) بحيث يجب أن تتحقق الشروط التالية: $b_i \geq 0$ و $a_{ij} > 0$.

VI – الخطوة السادسة: مادام أن المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل يلزم أن تشكل دائما مصفوفة وحدة فيما بينها، فيلزم إذن أن المتغير الذي ندخله يأخذ مكان المتغير الذي نخرجه، وبالتالي يلزم أن يشكل مصفوفة وحدة مع باقي متغيرات الحل الابتدائي الموجودة حاليا في قاعدة الحل. وذلك بضرب معاملات السطر الذي يوجد فيه المتغير الجديد في أعداد وقسمة (جمع أو طرح أيضا) هذا السطر مع الأسطر الأخرى في الجدول حتى يستطيع بعد ذلك أن يشكل مصفوفة وحدة مع غيره من متغيرات الحل الابتدائي.

VII - الخطوة السابعة: نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل (نتوقف عن محاولات البحث عن حل أمثل) إذا أصبحت كل القيم الموجودة في السطر الأعلى الثاني من الجدول- وهي معاملات دالة الهدف- أصبحت كلها موجبة أو صفر في حالة البحث عن (max) لدالة الهدف ، أو إذا أصبحت كلها سالبة أو صفر إذا ما كنا بصدد البحث عن (min) لـ(Z).

مثال1: مؤسسة إنتاجية ما تنتج أربع منتجات (A_4, A_3, A_2, A_1) باستعمالها لثلاث مواد أولية (b_3, b_2, b_1) ، الكميات من المواد الأولية الثلاثة اللازمة لإنتاج وحدة

واحدة من كل منتج من المنتجات السابقة معطاة في الجدول التالي، معطى كذلك في هذا الجدول الربح الذي تحصل عليه المؤسسة من بيع كل وحدة واحدة من المنتجات الأربعة المذكورة.

	المنتجات				
المواد الأولية المستعملة	A_1	A_2	A_3	A_4	الكمية القصوى المتاحة من المواد الأولية
b_1	2	1	4	7	1000
b_2	0	5	2	7	200
b_3	4	3	6	13	2000
الربح الوحدي المحصل عليه (و,ن)	5	2	10	1	

المطلوب: إيجاد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من المنتجات الثلاثة التي تسمح للمؤسسة بتعظيم أرباحها.

تكوين النموذج: الجدول السابق يمثل جدول المعاملات الفنية، فمثلا السطر الأول يعطينا كمية المادة الأولية الأولى (b_1) اللازمة لإنتاج كل وحدة واحدة من المنتجات (A_4, A_3, A_2, A_1) وهي: (2 وحدة ،1وحدة، 4 وحدات و 7 وحدات) على التوالي، فإذا افترضنا أن الكميات اللازم إنتاجها من المنتجات الأربعة ($\mathbf{A_4, A_3, A_2, A_1}$) التي تمكن المؤسسة من تعظيم أرباحها هي على التوالي:(X_4, X_3, X_2, X_1). فإن كمية المادة الأولية (b_1) اللازمة لإنتاج هذه الكميات من المنتجات الأربعة هي: $\mathbf{2X_1 + X_2 + 4X_3 + 7X_4}$. لكننا نعرف من معطيات الجدول السابق أن الكمية القصوى المتاحة للمؤسسة من هذه المادة الأولية هي (1000 وحدة)، وهذا يعني أن القيد الفني الخاص بهذه المادة الأولية سيكون كالتالي:

$$\mathbf{2X_1 + X_2 + 4X_3 + 7X_4 \leq 1000}$$

وبنفس الطريقة نحصل على القيود الفنية الخاصة بالمواد الأولية الأخرى كالتالي:

$$0X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 7X_4 \leq 200$$

$$4X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 13X_4 \leq 2000$$

مع شرط لا سلبية مؤشرات الإنتاج : $X_j \geq 0$

بالنسبة لدالة الهدف: فإن الجدول السابق يعطينا الربح المحصل عليه من كل وحدة مباعة من المنتجات الثلاثة، أي أن : (C_4, C_3, C_2, C_1) تساوي: (5و.ن،2 و.ن، 10ون،1 و.ن) على التوالي. فيكون الربح المحقق من بيع الكميات (X_4, X_3, X_2, X_1) المنتجة من المنتجات الأربعة هو $Z = 5X_1 + 2X_2 + 10X_3 + X_4$ وهذه هي دالة الهدف. ومطلوب منا تعظيم هذه الدالة، أي (max Z).

إذن النموذج الخطي الخاص بنشاط المؤسسة المذكورة هو:

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 2X_2 + 10X_3 + X_4$$

$$2X_1 + X_2 + 4X_3 + 7X_4 \leq 1000$$

$$5X_2 + 2X_2 + 7X_4 \leq 200$$

$$4X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 13X_4 \leq 2000$$

$$X_j \geq 0$$

حل النموذج:

1- لحل هذا البرنامج الخطي بواسطة السمبلكس، نحول شكل قيوده الفنية من متراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات الفرق (S_i) إلى طرفها الأيسر وإضافتها أيضا بمعاملات صفر إلى دالة الهدف، فيصبح كالتالي:

$$\max Z = 5X_1 + 2X_2 + 10X_3 + X_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$2X_1 + X_2 + 4X_3 + 7X_4 + S1 = 1000$$

$$5X_2 + 2X_3 + 7X_4 + S2 = 200$$

$$4X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 13X_4 + S3 = 2000$$

$$X_j \geq 0 , \quad Si \geq 0$$

2 - تكوين جدول الحل الابتدائي وتحويل المعلومات السابقة إليه:

متغيرات Z		X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	Sol
معاملات Z		-5	-2	-10	-1	0	0	0	0
متغيرات الحل الابتدائي									
S_1	معاملات	2	1	4	7	1	0	0	1000
S_2	متغيرات	0	5	2	7	0	1	0	200
S_3	القيود الفنية	4	3	6	13	0	0	1	2000

3- البحث عن الحل الابتدائي: يتناسب الحل الابتدائي مع مرحلة ما قبل النشاط، أي المرحلة التي لم تبدأ المؤسسة فيها النشاط بعد، وبالتالي تكون متغيرات القرار المعبرة عن كميات الإنتاج من المنتجات الأربعة تساوي الصفر ($X_i = 0$)، وعندما تكون الكميات المنتجة تساوي الصفر فإن دالة الهدف – وهي دالة أرباح المؤسسة – تساوي أيضا صفر. من هنا يصبح الحل الابتدائي يتكون من متغيرات الفرق (S_1 , S_2 , S_3) وقيمها هي على التوالي: (**$S_1 = 1000$, $S_2 = 200$, $S_3 = 2000$**).

$$\begin{bmatrix} S1 \\ S2 \\ S3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 200 \\ 2000 \end{bmatrix}$$

اختبار شروط قبول هذا الحل الابتدائي:

نلاحظ أن معاملات متغيرات هذا الحل في القيود الفنية هي أحادية موجبة، أي أنها تكون مصفوفة أحادية، وأيضا دالة الهدف تساوي صفر (على أساس أن كميات المبيعات والأرباح تساوي الصفر)، فنعتبر هذا الحل مقبولا.

4 – البحث عن الحل الأمثل:

بعد ضرب معاملات متغيرات دالة الهدف في (-1)، نعين متغير القرار الذي ندخله إلى قاعدة الحل من بين المتغيرات الأربعة التالية: **(X_4 , X_3, X_2 , X_1)**، فنختار المتغير الذي يكون معامله يساوي أصغر قيمة سالبة من بين معاملات دالة الهدف (أي في السطر العلوي الثاني من الجدول السابق)، هذه القيمة هي (-10) وهي معامل (**X_3**) فيدخل إذن إلى قاعدة الحل قبل غيره.

5- إن دخول المتغير (**X_3**) إلى قاعدة الحل يفرض علينا إخراج أحد متغيرات الحل الابتدائي من قاعدة الحل، ولمعرفة متغير الحل الابتدائي الذي يجب إخراجه نقوم بقسمة عناصر الطرف الأيمن من القيود الفنية على معاملات (X_3) في القيود الفنية، أي ($b_3/a_{33}, b_2/a_{23}, b_1/a_{13}$) و هي تساوي حسب معطيات النموذج:

(333,4 = 2000/6, 100 = 200/2, 250 = 1000/4).

أصغر قيمة غير سالبة من بينهم هي القيمة (**100**) وهي موجودة في الصف الثاني وتقابل (**S_2**) فيخرج هذا المتغير من قاعدة الحل ليترك مكانه للمتغير **X_3**.

6 - دخول (**X_3**) إلى قاعدة الحل في مكان (S_2) يعني أن هذا المتغير (**X_3**) يلزم أن يشكل مصفوفة وحدة مع بقية المتغيرات الموجودة حاليا في قاعدة الحل وهما (**S_3, S_1**)، ولتحقيق ذلك يجب أن نحول قيم معاملات **X_3** في القيود الفنية وهي (6, 2, 4 , -10) إلى قيم معاملات **S_2** في القيود الفنية وهي (0, 1, 0, 0)، بحيث تحول كل قيمة إلى القيمة المقابلة لها.

6	2	4	10-	X_3
→ 0	→ 1	→ 0	→ 0	→ S_2

أ- نبدأ هذا التحويل من الصف المحوري، والصف المحوري في هذه الحالة هو ذلك الصف الذي يدخل فيه المتغير X_3 وهو الصف الثاني، والتغيير الذي يجب علينا إجراءه في هذا الصف هو تحويل معامل X_3 فيه وهو (2) إلى معامل S_2 في هذا الصف وهو (1). من أجل تحويل (2) إلى (1) نقوم بقسمة هذه القيمة على نفسها، أي على (2). لكن حتى تحافظ المتراجحة على توازنها نقوم بقسمة كل معاملات متغيراتها على نفس القيمة 2، فيتحول الصف المحوري السابق:

S_2	7	2	5	0	0	1	0	200

إلى صف محوري جديد ذي قيم جديدة كالتالي:

S_2	3,5	1	2,5	0	0	0,5	0	100

ب- ننتقل إلى الصف الثالث وهو الصف الذي يوجد فيه المتغير S_3 ، ونحول معامل X_3 فيه وهو (6) إلى معامل S_2 في هذا الصف وهو (0)، ولكي تتحول القيمة (6) إلى صفر يكفي أن نجمعها مع معكوسها وهي (- 6)، لكن هذه العملية يجب أن تتم عبر الصف المحوري، فيلزم أن نضرب السطر الجديد المحصل عليه في (أ) وهو الصف المحوري، نضرب كل معاملاته في (-6) (ونجمعهم مع القيم المماثلة لهم في السطر الثالث. فيصبح السطر الثالث الجديد كالتالي:

S_3	8-	0	12-	4	0	-3	1	1400

ج - معامل (X_3) في السطر الأول لمعاملات القيود الفنية يساوي (4)، ويجب تحويله إلى صفر وذلك بضرب السطر الجديد المحصل عليه في (أ) وهو الصف المحوري، نضرب كل قيمه في معكوس القيمة (4) وهي (-4) ونجمعهم مع القيم المماثلة لهم في السطر الذي نحن بصدده فيصبح السطر الأول الجديد كالتالي:

S_1	7-	0	9-	2	1	-2	0	600

د- بقي السطر العلوي (وهو صف معاملات دالة الهدف)، يلزم أن يكون معامل (X_3) فيه أيضا 0 = (لتشكيل مصفوفة الوحدة)، فنضرب السطر المحوري (الثاني) في (10)، وهي معكوس معامل (X_3)، ونجمع مع السطر العلوي، فينتج من ذلك صف جديد لمعاملات دالة الهدف كالتالي:

Z	34	0	23	5-	0	5	0	1000

والآن ننقل هذه القيم الموجودة في الصفوف الجديدة إلى جدول موحد فنحصل على الجدول التالي:

متغيرات Z	X_1 ↓	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	Sol
معاملات Z	-5	23	0	34	0	5	0	1000
← S_1	2	-9	0	-7	1	-2	0	600
X_3	0	5/2	1	7/2	0	1/2	0	100
S_3	4	-12	0	-8	0	-3	1	1400

هذا الجدول نسميه بجدول **المحاولة الأولى**، التي تمثلت في إدخال المتغير (X_3) إلى قاعدة الحل.

نلاحظ أن إدخال المتغير (X_3) ساهم في تحسين قيمة دالة الهدف، التي انتقلت قيمتها من (0) إلى (1000 و.ن)، أي:

$$Z=5(0)+2(0)+10(100)+0=1000.$$

هل وصلنا بعد هذه المحاولة إلى الحد الأمثل؟ بمعنى هل هذه هي أقصى قيمة يمكن أن تصل إليها دالة الهدف أم ما زال هناك إمكانية أخرى لتحسينها.

لم نصل بعد إلى الحل الأمثل، ونعرف ذلك ببقاء قيمة سالبة في السطر الأعلى وهو سطر معاملات متغيرات دالة الهدف، فنواصل إذن عملية البحث عن الحل الأمثل وذلك بإدخال متغير القرار الذي يكون معامله يساوي أصغر قيمة

سالبة في صف معاملات دالة الهدف. ولكننا نلاحظ أنه بقيت قيمة سالبة واحدة فقط في صف معاملات دالة الهدف في الجدول المحصل عليه سابقا وهي: (-5) وهي معامل (X_1) فيدخل إذن هذا المتغير إلى قاعدة الحل.

نرى الآن النسب المحددة لخروج أحد المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل من أجل إدخال (X_1) مكانه، هذه النسب الآن هي (300=2/600، 0/100 هي قيمة غير محددة ، 350=4/1400) وأصغر قيمة غير سالبة من بينها هي (300) أي القيمة المقابلة لـ (S_1).فيخرج هذا المتغير إذن من قاعدة الحل ليترك مكانه لـ (X_1).

نجري الآن العمليات اللازمة لكي يصبح (X_1) يشكل مصفوفة وحدة مع باقي المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل وهي (S_3, X_3)، وهذا يتطلب تحويل معاملاته في القيود الفنية وهي (-5 ،2 ،0 ،4) إلى معاملات المتغير (S_1) في القيود الفنية وهي (0 ، 1 ، 0 ، 0) على الترتيب.

أ- الصف المحوري الجديد الآن هو الصف الأول — الصف الذي سوف يدخل فيه X_1 والموجود فيه حاليا S_1- نقسم قيم هذا الصف كله على (2) ونحصل على الصف الأول الجديد التالي:

X_1	$\frac{-9}{2}$	0	$\frac{-7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	0	300

ب- ثم نضرب قيم هذا الصف في (-4) ونجمعها مع قيم السطر الثالث (الأخير) في الجدول، فنحصل على السطر الثالث الجديد التالي:

S_3	6	0	6	0	$-\frac{9}{2}$	21	200

معامل (X_1) في السطر الثاني = 0، فلا نجري في هذا الصف أي عملية ونأخذه كما هو. يبقى الصف العلوي، أي صف دالة الهدف، فلكي بصبح معامل (X_1) فيه 0 -، يلزم أن نضرب الصف المحوري الجديد، نضربه في (5) ونجمعه مع السطر العلوي. فنحصل على صف جديد لمعاملات دالة الهدف:

Z	0	½	0	$\frac{33}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	0	2500

نقل هذه المعلومات إلى جدول جديد ونسميه بجدول **المحاولة الثانية**:

متغيرات Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	Sol
معاملات Z	0	1/2	0	33/2	5/2	0	0	2500
X_1	1	-9/2	0	-7/2	1/2	-1	0	300
X_3	0	5/2	1	7/2	0	1/2	0	100
S_3	0	6	0	6	-2	9/2	1	200

عند إدخال (X_1) إلى قاعدة الحل أدى إلى تحسين دالة الهدف، فانتقلت قيمها من**1000** إلى **2500** و.ن، وبهذا نكون قد وصلنا إلى القيمة المثلى لدالة الهدف (Z)، أي أقصى قيمة ممكنة لها في ظل القيود الفنية المعطاة، ونعرف ذلك باختفاء القيم السالبة من الصف العلوي، أي صف معاملات دالة الهدف.

إذن عناصر الحل الأمثل للنموذج المعطى هي: (X_4, X_3, X_2, X_1) وقيمها على التوالي هي (0, 100, 0, 300)، وتكون قيمة (Z) العظمى هي:

$$Z_{max} = 5(300) + 2(0) + 10(100) + 0 = 2500$$

مثال 2: ليكن النموذج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = -2X_1 + 6X_2 - 4X_3$$

$$3X_1 - X_2 + 2X_3 \leq 7$$

$- 2X_1 + 4X_2 + \leq 12$

$- 4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \leq 10$

$X_j \geq 0$

المطلوب: حل هذا النموذج باستعمال طريقة **Simplex**.

1- لحل هذا النموذج الخطي، نحول شكل قيوده الفنية من متراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات الفرق (S_i) إلى طرفها الأيسر ثم إضافتها بمعاملات صفر إلى دالة الهدف، فيصبح كالتالي:

$\text{Max } Z = - 2X_1 + 6X_2 - 4X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

$3X_1 - X_2 + 2X_3 + S_1 = 7$

$- 2X_1 + 4X_2 + S_2 = 12$

$- 4X_1 + 3X_2 + 8X_3 + S_3 = 10$

$X_j \geq 0$

2 - تكوين جدول الحل الابتدائي وتحويل المعلومات السابقة إليه:

متغيرات Z		X_1	↓ X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
معاملات Z		2	-6	4	0	0	0	0
متغيرات الحل الابتدائي								
S_1	معاملات	3	-1	2	1	0	0	7
← S_2	متغيرات	-2	4	0	0	1	0	12
S_3	القيود الفنية	-4	3	8	0	0	1	10

3 – الحل الابتدائي يتكون من متغيرات الفرق (S_1 , S_2 , S_3) وقيمها هي على التوالي: $(S_1 = 7 , S_2 = 200 , S_3 = 10)$، هذا الحل محصل عليه على أساس افتراض أنه يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط. نلاحظ أن معاملات متغيرات هذا الحل في

القيود الفنية هي أحادية موجبة، أي أنها تكون مصفوفة أحادية، وأيضا دالة الهدف تساوي صفر (على أساس أن قيمة مؤشرات القرار تساوي الصفر).

4 – البحث عن الحل الأمثل:

نعين متغير القرار الذي ندخله إلى قاعدة الحل من بين المتغيرات الثلاثة (X_3, X_2, X_1)، فنختار المتغير الذي يكون معامله يساوي أصغر قيمة سالبة في معاملات دالة الهدف، هذه القيمة هي (- 6) وهي معامل (X_2) فيدخل إذن إلى قاعدة الحل قبل غيره.

5 - إن دخول المتغير X_2 إلى قاعدة الحل يفرض علينا إخراج أحد متغيرات الحل الابتدائي، ولمعرفة متغير الحل الابتدائي الذي يجب إخراجه نقوم بقسمة عناصر الطرف الأيمن من القيود الفنية على معاملات (X_2) في القيود الفنية، أي (b_3/a_{33}, b_2/a_{23}, b_1/a_{13}) وهي تساوي حسب معطيات النموذج: (**$3{,}34 = 10/3$, $3 = 12/4$, $-7 = 7/-1$**). أصغر قيمة غير سالبة من بينهم هي القيمة (3) وهي موجودة في الصف الثاني وتقابل المتغير (S_2) فيخرج هذا المتغير من قاعدة الحل ليترك مكانه للمتغير X_2.

6 – دخول (X_2) إلى قاعدة الحل في مكان (S_2) يعني أن هذا المتغير (X_2) يلزم أن يشكل مصفوفة وحدة مع بقية المتغيرات الموجودة حاليا في قاعدة الحل وهما (S_3, S_1)، ولتحقيق ذلك يجب أن نحول قيم معاملات X_2 في القيود الفنية وهي (6-,1- ,4, 3) إلى قيم معاملات S_2 في القيود الفنية وهي (0, 0, 1, 0)، بحيث تحول كل قيمة إلى القيمة المقابلة لها.

أ- نبدأ هذا التحويل من الصف المحوري، والصف المحوري في هذه الحالة هو ذلك الصف الذي يدخل فيه المتغير X_2 وهو الصف الثاني، والتغيير الذي يجب علينا إجراءه في هذا الصف هو تحويل معامل X_2 فيه وهو (4) إلى معامل S_2 في هذا الصف وهو (1). من أجل تحويل (4) إلى (1) نقوم بقسمة هذه القيمة على نفسها، أي على (4). لكن حتى تحافظ المتراجحة على توازنها نقوم بقسمة كل معاملات متغيراتها على نفس القيمة وهي4 فنحصل على قيم جديدة للصف المحوري كالتالي:

X_2	$\frac{1}{2}$ -	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3

ب – ننتقل إلى الصف الثالث وهو الصف الذي يوجد فيه المتغير S_3، ونحول معامل X_2 فيه وهو (3) إلى معامل S_2 في هذا الصف وهو (0)، ولكي تتحول القيمة (3) إلى صفر يكفي أن نجمعها مع معكوسها وهي (-3)، لكن هذه العملية يجب أن تتم عبر الصف المحوري، فيلزم أن نضرب السطر الجديد المحصل عليه في (أ) وهو الصف المحوري، نضرب كل معاملاته في (- 3) ونجمعهم مع القيم المماثلة لهم في السطر الثالث. فيصبح السطر الثالث الجديد كالتالي:

S_3	- 2/5	0	8	0	-3/4	0	1

ج – معامل (X_2) في السطر الأول لمعاملات القيود الفنية يساوي (-1)، ويجب تحويله إلى صفر وذلك بضرب السطر الجديد المحصل عليه في (أ)، وهو الصف المحوري، نضرب كل قيمه في معكوس القيمة (-1) وهي (+1) ونجمعهم مع القيم المماثلة لهم في السطر الذي نحن بصدده، فيصبح السطر الأول الجديد كالتالي:

S_3	5/2	0	8	0	3/4	0	1

د- بقي السطر العلوي (وهو صف معاملات دالة الهدف)، يلزم أن يكون معامل (X_2) فيه أيضا 0 = (لتشكيل مصفوفة الوحدة)، فنضرب السطر المحوري (الثاني) كله في (6)، وهي معكوس معامل (X_2)، ونجمع مع السطر العلوي، فينتج عن ذلك صف جديد لمعاملات دالة الهدف كالتالي:

Z	-1	0	4	0	3/2	0	18

والآن ننقل هذه القيم الموجودة في الصفوف الجديدة إلى جدول موحد فنحصل على الجدول التالي:

متغيرات Z	↓ X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
معاملات Z	**–1**	0	4	**0**	3/2	0	18
← S_1	**5/2**	0	2	**1**	1/4	0	10
X_2	**–1/2**	1	0	**0**	1/4	0	3
S_3	**–5/2**	0	8	**0**	-3/4	1	1

هذا الجدول هو جدول **المحاولة الأولى**، التي تمثلت في إدخال المتغير (X_2) إلى قاعدة الحل. نلاحظ أن إدخال المتغير (X_2) ساهم في تحسين قيمة دالة الهدف، التي انتقلت قيمتها من (0) إلى (18) أي:

$$Z = -2(0) + 6(3) + 10(0) + 0 = 18$$

هل وصلنا بعد هذه المحاولة إلى الحد الأمثل؟ بمعنى هل هذه هي أقصى قيمة يمكن أن تصل إليها دالة الهدف أم لا زال هناك إمكانية أخرى لتحسينها.

لم نصل بعد إلى الحل الأمثل، وذلك لبقاء قيمة سالبة في السطر الأعلى وهو سطر معاملات متغيرات دالة الهدف، فنواصل إذن عملية البحث عن الحل الأمثل وذلك بإدخال متغير القرار الذي يكون معامله يساوي أصغر قيمة سالبة في صف

معاملات دالة الهدف. ولكننا نلاحظ أنه بقيت قيمة سالبة واحدة فقط في صف معاملات دالة الهدف في الجدول المحصل عليه سابقا وهي (-1)، وهي معامل (X_1) فيدخل إذن هذا المتغير إلى قاعدة الحل.

نختبر الآن النسب المحددة لخروج أحد المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل من أجل إدخال (X_1) مكانه، هذه النسب الآن هي (4 =2,5/10، 3/-0,5= قيمة سالبة، -0,4= 2,5-/1 وهي أيضا قيمة سالبة) وأصغر قيمة غير سالبة من بينها هي (4) أي القيمة المقابلة لـ (S_1) فيخرج هذا المتغير إذن من قاعدة الحل ليترك مكانه لـ (X_1).

نجري الآن العمليات الضرورية لكي يصبح (X_1) يشكل مصفوفة وحدة مع باقي المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل وهي (S_3, X_2)، وهذا يتطلب تحويل معاملاته في القيود الفنية وهي(-1 ،2,5، -2/1، 2,5-) إلى معاملات المتغير (S_1) في القيود الفنية وهي (0 ،1، 0، 0) على الترتيب.

أ- الصف المحوري الجديد الآن هو الصف الأول (الصف الذي سوف يدخل فيه X_1)، نضرب قيم هذا الصف كلها في (5/2) فنحصل على الصف الأول الجديد التالي:

X_1	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	4

ب- ثم نضرب قيم هذا الصف الأول الجديد (الصف المحوري) في (2/5) ونجمعها مع قيم السطر الثالث (الأخير) في الجدول، فنحصل على السطر الثالث الجديد التالي:

S_3	0	0	10	1	$-\frac{1}{2}$	1	11

معامل (X_1) في السطر الثاني -2/1 =، فنضرب قيم الصف الأول الجديد في (2/1) ونجمعها مع قيم السطر الثاني في الجدول، فنحصل على السطر الثاني الجديد التالي:

X_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	5

يبقى السطر العلوي، أي سطر دالة الهدف، فلكي يصبح معامل (X_1) فيه 0=، يلزم أن نضرب قيم الصف المحوري الجديد، نضربها في (1) ونجمعها مع السطر العلوي. فنحصل على السطر العلوي الجديد التالي:

Z	0	0	$\frac{24}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	22

ننقل هذه المعلومات إلى جدول جديد ونسميه بجدول المحاولة الثانية:

متغيرات Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
معاملات Z	0	0	$\frac{24}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	22
X_1	1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	4
X_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	5
S_3	0	0	10	1	$-\frac{1}{2}$	1	11

عند إدخال (X_1) إلى قاعدة الحل أدى إلى تحسين دالة الهدف، فانتقلت قيمها من 18 إلى 22، وبهذا نكون قد وصلنا إلى القيمة المثلى لدالة الهدف (Z)، أي أقصى قيمة ممكنة لها في ظل القيود الفنية المعطاة، ونعرف ذلك بعدم وجود القيم السالبة في الصف العلوي، أي صف معاملات دالة الهدف.

إذن عناصر الحل الأمثل للنموذج المعطى هي: (X_3, X_2, X_1) وقيمها على التوالي هي: (4, 5, 0)، وتكون قيمة (Z) العظمى هي:

$$Z_{max} - 2(4) + 6(5) - 4(0) = 22$$

ثانيا: حل النماذج الخطية من الشكل:

$$\text{opt } Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$
$$\sum a_{ij} X_j \ (\geq), (=) \ b_i$$
$$i = 1, \ldots, m$$
$$X_j \geq 0, \quad b_i \geq 0$$

في الحالة السابقة استعملنا طريقة الـ **Simplex** في حل النماذج الخطية التي تكون قيودها الفنية كلها من الشكل (أقل أو يساوي)، فعند تحويلها إلى شكل معادلات نضيف إلى طرفها الأيسر متغيرات الفرق (S_i)، فتكون معاملات هذه المتغيرات أحادية موجبة في القيود الفنية.

عند بداية البحث عن الحل الابتدائي الذي يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط، لاحظنا أن هذه المتغيرات هي نفسها تكون عناصر الحل الابتدائي، وذلك على أساس أن متغيرات القرار (X_j) تساوي الصفر.

هذا الحل الابتدائي تتوفر فيه شروط القبول التي تنص على أن معاملات متغيرات الحل الابتدائي يجب أن تكون مصفوفة وحدة فيما بينها، وأن دالة الهدف يجب أن تكون عند المستوى صفر.

أما الآن فلدينا قيود فنية على شكل معادلات (=) أو (و) قيود فنية أخرى على شكل أكبر أو يساوي ($\leq$)، ولتحويلها إلى معادلات يلزم أن نطرح من طرفها الأيسر متغيرات فرق (S_i) أو لا نضيف ولا نطرح منها أي شيء، فيكون معامل هذه المتغيرات في القيود الفنية أحادي سالب أو صفر. فإذا ما أردنا هنا أن نبحث عن الحل الابتدائي — الذي يتناسب مع مرحلة ما قبل النشاط وفيه نجعل مؤشرات

القرار تساوي الصفر- نلاحظ أن الحل الابتدائي هنا أيضا يتكون من متغيرات الفرق (S_i)، إلا أن عناصر هذا الحل في هذه الحالة لا تتوفر فيها شروط القبول، وذلك لأن معاملات هذه المتغيرات في القيود الفنية ليست أحادية موجبة (إما أحادية سالبة $-S_i$ أو صفر $0S_i$). في هذه الحالة لا نستطيع البحث عن حل أمثل للنموذج المطروح بالاعتماد على حل ابتدائي غير مقبول.

للتخلص من هذا العائق والحصول على حل ابتدائي مقبول، نلجأ إلى استعمال نوع جديد من المتغيرات التي نسميها المتغيرات الاصطناعبة ونرمز لها بالرمز (R_i) ونضيفها إلى الطرف الأيسر من القيود الفنية التي تتسبب في مشكل عدم قبولية الحل الابتدائي فقط، حيث أن هذه المتغيرات هي متغيرات وهمية ولا وجود لها في الواقع نستعملها فقط من أجل حل النموذج ثم نتخلص منها عند نهاية الحل.

إضافة هذه المتغيرات إلى القيود الفنية يتطلب منا أيضا إضافتها إلى دالة الهدف بكميات (بمعاملات) كبيرة نسميها مثلا (**M**) في حالة ما إذا كان معيار الأمثلية لدالة الهدف هو (**min**)، وطرح هذه المتغيرات بكميات كبيرة (**M**) من دالة الهدف (**Z**) في حالة البحث عن (**max**)، على اعتبار أن **M** هي كمية موجبة كبيرة جدا تقترب من ما لانهاية.

عند إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود الفنية سوف نتمكن من الحصول على حل ابتدائي جديد، الذي يتكون من المتغيرات الاصطناعية ومتغيرات الفرق التي تكون معاملاتها في القيود الفنية في ما بينها مصفوفة أحادية. لنأخذ المثال التالي ونتتبع من خلاله الخطوات اللازم إتباعها لحل هذا الشكل من النماذج الخطية بواسطة طريقة السمبلكس.

مثال 1: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس:

$\min Z = 120X_1 + 150X_2 + 200X_3$

$50X_2 + 30X_3 \geq 20$

$10X_2 + 20X_3 \geq 10$

$40X_2 + 10X_3 \leq 20$

$X_1 + X_2 + X_3 = 1$

$X_j \geq 0$

الحل:

لحل هذا النموذج الخطي بواسطة طريقة السمبلكس لابد من تحويل قيوده الفنية إلى شكل معادلات، أي:

$50X_2 + 30X_3 \geq 20$		$50X_2 + 30X_3 - S_1 = 20$
$10X_2 + 20X_3 \geq 10$	يتحول إلى	$10X_2 + 20X_3 - S_2 = 10$
$40X_2 + 10X_3 \leq 20$		$40X_2 + 10X_3 + S_3 = 20$
$X_1 + X_2 + X_3 = 1$		$X_1 + X_2 + X_3 + 0S_4 = 1$
$X_j \geq 0$		$X_j \geq 0$

عند البحث عن الحل الابتدائي، بافتراض أن متغيرات القرار (X_j) تساوي الصفر، نلاحظ أن هذا الحل يتكون من متغيرات الفرق وهي (S_1) (الذي معامله في القيود الفنية يساوي (-1))، و(S_2) (الذي معامله هو أيضا (-1)) بينما معامل (S_3) فهو (+1)، ومعامل (S_4) يساوي (0). هذه المعاملات ليست كلها أحادية موجبة وبالتالي فهي لا تشكل مصفوفة أحادية فيما بينها، وفي هذه الحالة فإن متغيرات الفرق لا تشكل حلا ابتدائيا مقبولا. ولتجاوز هذه المشكلة وتكوين حل

ابتدائي مقبول، نفترض المتغيرات الاصطناعية (R_4,R_2,R_1) ونضيفها إلى القيد الفني (IV, II, I) على التوالي. فتصبح هذه القيود على الشكل التالي:

$$50X_2 + 30X_3 - S_1 + R_1 = 20$$
$$10X_2 + 20X_3 - S_2 + R_2 = 10$$
$$40X_2 + 10X_3 + S_3 = 20$$
$$X_1 + X_2 + X_3 + 0S_4 + R_4 = 1$$
$$X_j \geq 0 , \quad S_i \geq 0 , \quad R_i \geq 0$$

إن إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود الفنية يمكننا من الحصول على حل ابتدائي جديد، الذي يتكون من المتغيرات ($R_1 = 20$) ، ($R_2 = 10$)، ($S_3 =$ 20)، ($R_4 = 1$)، أي أن المتغير (R_1) يحل في مكان المتغير (S_1) و(R_2) يحل في مكان (S_2) بينما يحل المتغير (R_4) في مكان (S_4) أما (S_3) فيحافظ على مكانته.

هذا الحل الابتدائي الجديد يتوفر فيه الآن شرط القبول الأول وهو أن معاملاته في القيود الفنية هي أحادية موجبة – أي أنها تكون مصفوفة أحادية، وما دمنا بصدد البحث عن (**min**) لدالة الهدف فإن إضافة هذه المتغيرات الاصطناعية إلى القيود الفنية يتطلب إضافتها أيضا إلى دالة الهدف ولكن بمعاملات موجبة كبيرة (**M**). فتصبح دالة الهدف كالتالي:

$$\min Z=120X_1+150X_2+200X_3+MR_1+MR_2+MR_4+0S_1+0S_2+0S_3$$

وتصبح متغيرات الحل الابتدائي هي (R_4, S_3, R_2, R_1).

2 - يصبح الجدول الممثل لبيانات الحل الابتدائي هو:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	Sol
Z	-120	-150	-200	0	0	-m	-m	0	-m	-31m
R_1	0	50	30	-1	0	1	0	0	0	20
R_2	0	10	20	0	-1	0	1	0	0	10
S_3	0	40	10	0	0	0	0	1	0	20
R_4	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

ولكن نحن نعرف أنه من ضمن شروط قبول الحل الابتدائي أيضا أن تكون دالة الهدف (**Z=0**)، لأننا نفترض أن كل متغيرات القرار (**X_j=0**) ومعاملات متغيرات الفرق في دالة الهدف تساوي الصفر.

ولكننا نلاحظ هنا في الجدول أن معاملات المتغيرات الاصطناعية (**R_4, R_2, R_1**) هي على التوالي (**-M**) وبالتالي فدالة الهدف تساوي (**-31M**) وليس صفر، إذن فهذا الجدول لا يمثل حلا ابتدائيا **مقبولا**. ولجعل دالة الهدف تساوي صفر يجب التخلص من هذه القيم غير الصفرية لمعاملات (**R_4, R_2, R_1**) في دالة الهدف وهي (**M-**) وذلك بجمعها مع معكوسها، فنضرب قيم الصف الثالث الذي يوجد به (**R_1**) كله في معكوس معامله وهو(**M**) ونجمعه مع قيم الصف العلوي (صف معاملات دالة الهدف)، ثم نضرب قيم الصف الرابع الذي يوجد به (R_2)كله في معكوس معامله ونجمعه مع الصف العلوي وأيضا صف (**R_4**) نضربه في (**M**) ونجمعه مع الصف العلوي. فتصبح قيم معاملات (**R_4, R_2, R_1**) في دالة الهدف = 0، ونتيجة لذلك تصبح دالة الهدف تساوي الصفر كما هو موضح في الجدول التالي:

Z	X_1	↓ X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	Sol
Z	-120 + m	**-150 +61m**	-200 +51m	- m	- m	**0**	0	0	0	**0**
R_1 ←	0	**50**	30	-1	0	**1**	0	0	0	20
R_2	0	**10**	20	0	-1	**0**	**1**	0	0	10
S_3	0	**40**	10	0	0	**0**	0	**1**	0	20
R_4	1	**1**	1	0	0	**0**	0	0	1	**1**

لقد وضعنا دالة الهدف عند المستوى صفر، وأصبح الجدول يمثل حلا ابتدائيا **مقبولا.**

3 - نبدأ في مرحلة البحث عن الأمثل وذلك بتجريب إدخال متغيرات القرار ونرى مدى مساهمتها في تدنية دالة الهدف **(min Z).**

ومتغير القرار الذي ندخله قبل غيره في قاعدة الحل هو الذي يكون معامله في سطر معاملات دالة الهدف يساوي أكبر قيمة موجبة من غيره من المتغيرات (أنظر السطر العلوي الثاني من الجدول). حيث نختار للإدخال دائما في هذه الحالة متغير القرار الذي يكون معامله في دالة الهدف هو أعلى قيمة موجبة إذا ما كان الأمر يتعلق بالبحث عن **(min)** لـ **Z**. هذه القيمة هي **(‎-150+61m‎)** على أساس أن **(m)** هي قيمة موجبة كبيرة جدا، وبالتالي فالمتغير الذي يدخل إلى قاعدة الحل هو **(X_2)**.

4 - ولمعرفة المتغير الذي نخرجه من متغيرات الحل الابتدائي نحسب النسب غير السالبة المحددة لذلك وهي: (2/5 ، 1 ،2/4، 1). فيخرج إذن المتغير الذي تقابله أقل قيمة غير سالبة وهي (0,4) والتي تقابل **(R_1)**، فيخرج إذن من قاعدة الحل ليترك مكانه لـ **(X_2)**.

5 - دخول (X_2) إلى قاعدة الحل مكان (**R_1**) يعني أن هذا المتغير يلزم أن يشكل مصفوفة وحدة مع متغيرات قاعدة الحل الأخرى (**R_4,R_2,S_3**) ولتحقيق ذلك نجري العمليات التالية:

نقسم قيم الصف الثالث – وهو الصف المحوري - على (50)، ثم نضرب الصف الجديد المحصل عليه(الصف الثالث بعد قسمته على 50) نضربه في (-10) ونجمعه مع قيم الصف الرابع. ثم نضرب الصف الثالث في (-40) ونجمعه مع قيم الصف الخامس، ثم نضرب الصف الثالث في (-1) ونجمعه مع قيم الصف السادس، وأخيرا نضرب الصف الثالث في (**+150–61m**) ونجمعه مع قيم الصف الثاني وهو صف معاملات دالة الهدف، فنحصل على الجدول التالي (**جدول المحاولة الأولى**):

Z	X_1	X_2	↓ X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	Sol
Z	-120 + m	0	$-110 \frac{+72M}{5}$	$-3 \frac{+11M}{50}$	-m	$+3 \frac{-61M}{50}$	0	0	0	60 – 24.4m
X_2	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{50}$	0	$\frac{1}{50}$	0	0	0	$\frac{2}{5}$
R_2 ←	0	0	14	$\frac{1}{5}$	-1	$\frac{-1}{5}$	1	0	0	6
S_3	0	0	-14	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{-4}{5}$	0	1	0	4
R_4	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{50}$	0	$\frac{-1}{50}$	0	0	1	$\frac{3}{5}$

نلاحظ أن دالة الهدف تحسنت (انخفضت) وانتقلت قيمتها من (0) إلى (**60 –24,4m**). ولكننالم نصل بعد إلى الحل الأمثل، نظرا لأنه في السطر العلوي، وهو سطر معاملات دالة الهدف، مازالت توجد قيم موجبة، وهي: (**–3+11/50m**) .(**–110+72/5m, +m–120,**)

أكبر هذه القيم هي معامل (X_3) فيدخل إلى قاعدة الحل، ويخرج المتغير الذي تقابله أقل قيمة غير سالبة من بين القيم التالية: {$3/2 = 2/5 \div 3/5, 3/7 = 14 \div 6, -2/7 = -14 \div 4, 2/3 = 3/5 \div 2/5$} فيخرج إذن ($R_2$) من قاعدة الحل ليحل محله (X_3).

نجري بعدها العمليات الضرورية لكي يصبح (X_3) يشكل مصفوفة وحدة مع (R_4, S_3, X_2) ثم ننقل المعلومات المحصل عليها إلى الجدول الجديد التالي:

(جدول المحاولة الثانية)

Z	X_1 ↓	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	Sol
Z	-120 + m	0	0	$\frac{-10}{7}+\frac{M}{70}$	$\frac{-55}{7}+\frac{M}{35}$	$\frac{10}{7}-\frac{71m}{70}$	$\frac{55}{7}-\frac{72m}{70}$	0	0	750/7 − 30,57m
X_2	0	1	0	$\frac{-1}{35}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{-3}{70}$	0	0	$\frac{1}{7}$
X_3	0	0	1	$\frac{1}{70}$	$\frac{-1}{14}$	$\frac{-1}{70}$	$\frac{1}{14}$	0	0	$\frac{3}{7}$
S_3	0	0	0	1	−1	−1	1	1	0	10
R_4 ←	1	0	0	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{-1}{70}$	$\frac{-1}{35}$	0	1	$\frac{3}{7}$

عند إدخال (X_3) إلى قاعدة الحل أدى إلى تحسين دالة الهدف، أي انخفاض قيمة (Z) من ($60 - 24,4m$) إلى ($750/7 - 30,57\ m$) .

مازلنا لم نصل إلى الحل الأمثل وذلك لوجود قيم موجبة في سطر معاملات دالة الهدف، وأكبر قيمة من بين هذه القيم هي معامل (X_1) فيدخل إلى الحل ويخرج

(R_4) نظرا لأنه تقابله أقل قيمة غير سالبة من بين القيم التي تحدد خروج المتغيرات من قاعدة الحل.

وبعد أن نجري العمليات اللازمة لكي يصبح المتغير (X_1) يشكل مصفوفة وحدة مع بقية المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل، نحصل على الجدول الجديد التالي:

(جدول المحاولة الثالثة)

Z	X_1	X_2	X_3	S_1 ↓	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	Sol
Z	0	0	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{-31}{7}$	$\frac{-2}{7}$-- m	$\frac{31}{7}$ -m	0	120 -m	1110/7 -31m
X_2	0	1	0	$\frac{-1}{35}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{-3}{70}$	0	0	1/7
X_3	0	0	1	$\frac{1}{70}$	$\frac{-1}{14}$	$\frac{-1}{70}$	$\frac{1}{14}$	0	0	3/7
S_3 ←	0	0	0	1	-1	-1	1	1	0	10
X_1	1	0	0	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{-1}{70}$	$\frac{-1}{35}$	0	1	$\frac{3}{7}$

نواصل البحث عن أقل قيمة لـ (**Z**) وذلك مادام هناك قيم موجبة في الصف العلوي (سطر معاملات دالة الهدف). بقيت الآن قيمة واحدة موجبة في هذا الصف وهي معامل (S_1) فيدخل هذا المتغير إلى قاعدة الحل، ويخرج المتغير الذي تقابله أقل نسبة (b_i/a_{ij}) غير سالبة. فيخرج إذن المتغير (S_3). بعد إجراء العمليات الضرورية لإدخال (S_1) في مصفوفة الوحدة مع بقية المتغيرات الموجودة في قاعدة الحل ينتج الجدول التالي:

(جدول المحاولة الرابعة)

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	S_3	R_4	Sol
Z	0	0	0	0	$\frac{-29}{7}$	-m	$\frac{29}{7} - m$	$\frac{2}{7}$	120 -m	$\frac{1090}{7} - 31m$
X_2	0	1	0	0	$\frac{1}{70}$	0	-1	$-\frac{1}{35}$	0	$\frac{3}{7}$
X_3	0	0	1	0	$\frac{-16,5}{70}$	0	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{70}$	0	$\frac{2}{7}$
S_1	0	0	0	1	-1	-1	14	1	0	10
X_1	1	0	0	0	$\frac{3}{70}$	0	$-\frac{3}{70}$	$-\frac{1}{70}$	1	$\frac{2}{7}$

بهذا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل، وذلك لاختفاء القيم الموجبة من السطر العلوي الثاني. وتكون قيمة Z_{min} تساوي (1090/7)، بالتخلي عن القيمة (-31m) وهي معامل المتغير الاصطناعي التي نهملها بعد الوصول إلى الحل الأمثل. وقيم عناصر الحل الأمثل (X_3, X_2, X_1) هي على التوالي (2/7 ,3/7 ,2/7).

مثال 2: حل النموذج الخطي التالي باستعمال الطريقة السمبلكس:

$\min Z = 2X_1 + 8X_2$

$5X_1 + 10X_2 = 150$

$X_1 \leq 20$

$X_2 \geq 14 \;,\; X_1 \geq 0$

الحل: لحل هذا النموذج الخطي بواسطة طريقة السمبلكس لابد من تحويله إلى شكله الكانوني، نلاحظ أن القيد الفني الثاني والثالث هما على شكل ($\leq, \geq$) ولتحويلهما

إلى شكلهما القياسي نضيف إلى الأول متغير الفرق (S_2) ونطرح من الثاني متغير الفرق (S_3) فتصبح هذه القيود كالتالي:

$5X_1 + 10X_2 + 0S_1 = 150$

$X_1 + S_2 = 20$

$X_2 - S_3 = 14$

$X_1 \geq 0$

بافتراض أن متغيرات القرار $(\mathbf{X_1, X_2})$ تساوي الصفر للاعتبار المشار إليه سابقا، فإن متغيرات الحل الابتدائي وهي متغيرات الفرق لا تشكل مصفوفة وحدة فيما بينها: معامل (S_3) في القيد الفني الثالث سالب ومعامل S_1 في القيد الفني الأول يساوي الصفر، وبالتالي فإن هذا الحل غير مقبول. فنضطر لإضافة المتغيرات الاصطناعية $(\mathbf{R_1, R_3})$ إلى القيد الفني الثالث والأول ثم نضيفهما أيضا إلى دالة الهدف بالكمية $(\mathbf{m})$ فيصبح النموذج السابق كالتالي:

$\mathbf{min\ Z = 2X_1 + 8X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_3}$

$\mathbf{5X_1 + 10X_2 + R_1 = 150}$

$\mathbf{X_1 + S_2 = 20}$

$\mathbf{X_2 - S_3 + R_3 = 14}$

$\mathbf{X_1 \geq 0}$

إضافة المتغيرات الاصطناعية يمكننا من تكوين حل ابتدائي جديد يتشكل من المتغيرات $(\mathbf{R_3, S_2, R_1})$، هذه المتغيرات موجودة حاليا في قاعدة الحل ومعاملاتها أحادية موجبة (تكون مصفوفة أحادية في ما بينها)، فنعتبر أن هذا الحل الابتدائي مقبولا. ننقل هذه المعلومات إلى جدول الحل الابتدائي.

Z	X_1	X_2	S_3	R_1	S_2	R_3	الحل
Z	-2	-8	0	-m	0	-m	– 164m
R_1	5	10	0	1	0	0	150
S_2	1	0	0	0	1	0	20
R_3	0	1	-1	0	0	1	14

من ضمن شروط قبول الحل الابتدائي هو أن تكون دالة الهدف عند المستوى صفر، لكن بالنظر إلى الجدول السابق نلاحظ أن دالة الهدف حاليا تساوي (**–164 m**)، لذلك نعتبر أن الحل الابتدائي لازال غير مقبولا، ويجب التخلص من معاملات (**R_3, R_1**) لكي نجعل دالة الهدف عند المستوى صفر. من أجل ذلك نضرب كل من قيم الصف الثالث والخامس اللذان توجد فيهما (**R_1**) و (**R_2**) كليهما في (**+m**) ونجمع النواتج مع قيم معاملات دالة الهدف، فنحصل على النتائج الموجودة في الجدول التالي، الذي يمثل حلا ابتدائيا مقبولا. هذا الحل يتكون من (**$R_3 = 14$, $S_2 = 20$, $R_1 = 150$**).

Z	X_1	X_2 ↓	S_3	R_1	S_2	R_3	الحل
Z	-2+5m	– 8+11m	-m	0	0	0	0
R_1	5	10	0	1	0	0	150
S_2	1	0	0	0	1	0	20
← R_3	0	1	-1	0	0	1	14

نبدأ الآن البحث عن الحل الأمثل لهذا النموذج وذلك بتحديد متغير القرار الذي يدخل لقاعدة الحل قبل غيره، المتغير الذي يدخل أولا هو (**X_2**) لأنه صاحب

أكبر معامل موجب في صف دالة الهدف **(‎-8+11m‎)** أما المتغير الذي يخرج فهو **(R_3)** لأنه هو الذي تقابله أقل نسبة (b_i/a_{ij}) غير سالبة.

ولكي يصبح **(X_2)** يشكل مصفوفة وحدة مع **(S_2, R_1)** يجب أولا قسمة الصف الثالث على 1 فيحافظ على قيمه كما هي ويصبح هو الصف المحوري، ثم ضرب هذا الصف الخامس، في (-10) وجمعه مع الصف الثالث، بعد ذلك نضربه في **(‎+ 8 -11m‎)** ونجمع مع قيم صف معاملات دالة الهدف فنحصل بعد هذه العمليات على الجدول الجديد التالي:

(وهو جدول المحاولة الأولى)

Z	X_1	X_2	↓ S_3	R_1	S_2	R_3	الحل
Z	-	0	-8 +10m	0	0	8 -	112-44m
← R_1	5	0	10	1	0	-10	10
S_2	1	0	0	0	1	0	20
X_2	0	1	-1	0	0	1	14

دالة الهدف تحسنت بعد إدخال **(X_2)** إلى قاعدة الحل، وانخفضت قيمتها من: (0) إلى (112-44m) ، ومادام هناك قيم موجبة في صف معاملات دالة الهدف، فنستمر في محاولات البحث على الحل الأمثل.

أكبر قيمة موجبة الآن من بين هذه القيم هي:**(‎-8+10m‎)**، وهي معامل (S_3) فيدخل إلى قاعدة الحل ويخرج (R_1) لأنه هو الذي تقابله أقل نسبة (b_i/a_{ij}) غير سالبة.

وبعد إجراء العمليات اللازمة لإدخال(S_3) في مصفوفة الوحدة مع بقية متغيرات القاعدة نحصل على الجدول التالي:

(وهو جدول المحاولة الثانية)

Z	X_1	X_2	S_3	R_1	S_2	R_3	الحل
Z	2	0	0	6/5-m	0	-M	120 -54m
S_3	1/2	0	1	1/10	0	-1	1
S_2	1	0	0	0	1	0	20
X_2	1/2	1	0	1/10	0	0	15

مازالت هناك قيمة موجبة في السطر العلوي الثاني (قيم معاملات متغيرات دالة الهدف)، وطالما أننا بصدد البحث عن **(min Z)** فنستمر في محاولات البحث على الحل الأمثل، وخاصة أن دالة الهدف تحسنت نتيجة إدخال (S_3) إلى قاعدة الحل: انخفضت من **(112-44m)** إلى **120 -54m**.

المتغير الذي يدخل الآن هو (X_1) والذي معامله هو القيمة الموجبة الوحيدة المتبقية في سطر معاملات دالة الهدف ويخرج المتغير (S_3) من جديد. وبعد إجراء العمليات التي تمكنا من إدخال (X_1) في مصفوفة الوحدة. نحصل على الجدول التالي:

(جدول المحاولة الثالثة)

Z	X_1	X_2	S_3	R_1	S_2	R_3	الحل
Z	0	0	-4	2/5-m	0	4-m	116
X_1	1	0	2	1/5	0	-2	2
S_2	0	0	-2	-1/5	1	2	18
X_2	0	1	-1	0	0	1	14

هذا الجدول يمثل حلا نهائيا (أمثلا) نظرا لأنه لم تعد هناك قيم موجبة في سطر معاملات دالة الهدف. والقيمة المثلى لدالة الهدف هي:

$$\min Z = 2(2) + 8(14) = 116$$

مثال 3: حل النموذج الخطي التالي: $\mathbf{Max} = 4X_1 + 5X_2 + X_3$

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2$$

$$X_j \geq 0$$

الحل:

1 – نحول القيود الفنية (المتراجحات) إلى معادلات بإضافة متغير الفرق (S_1) إلى الطرف الأيسر للقيد الفني الأول، ونطرح متغير الفرق (S_2) من الطرف الأيسر للقيد الفني الثاني.

2 – نكون حل ابتدائي بافتراض متغيرات القرار تساوي الصفر (مرحلة ما قبل النشاط).

3 – نستنتج أن هذا الحل الابتدائي غير مقبول.

4 – نضيف متغير اصطناعي (R_2) إلى القيد الفني الثاني، ونطرحه بمعامل موجب كبير (**m**) من دالة الهدف.

5 – بعد هذا نحصل على حل ابتدائي جديد يتكون من ($S_1=8$)، ($R_2= 2$).

6 – لكي يصبح هذا الحل الابتدائي الجديد مقبولا، نجعل دالة الهدف تساوي الصفر، فنحصل بعدها على جدول الحل الابتدائي التالي:

Z	X_1	X_2 ↓	X_3	S_2	S_1	R_2	Sol
Z	-4-m	**-5-2m**	-1+m	+m	0	**0**	0
S_1	1	**1**	1	0	1	**0**	8
R_2 ←	1	**2**	-1	-1	0	**1**	2

نبدأ الآن المرحلة الثانية من الحل المتمثلة في البحث عن الحل الأمثل، وذلك بإدخال المتغير (X_2) في مكان (R_2)، فنحصل على **جدول المحاولة الأولى** التالي:

Z	X_1	X_2	↓ X_3	S_2	S_1	R_2	Sol
Z	$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{-7}{2}$	$\frac{-5}{2}$	**0**	$\frac{5}{2}+2m$	5+2m
S_1 ←	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	**1**	$\frac{-1}{2}$	7
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	**0**	$\frac{1}{2}$	1

لم نحصل على الحل الأمثل بعد، وندخل المتغير (X_3) في مكان (S_1) ونحصل على جدول المحاولة الثانية التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	↓ S_2	S_1	R_2	Sol
Z	$\frac{-1}{3}$	0	**0**	$\frac{-4}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$+m	$\frac{66}{3}$+2m
X_3 ←	$\frac{1}{3}$	0	**1**	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{14}{3}$
X_2	$\frac{2}{3}$	1	**0**	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

لم نحصل بعد هذه المحاولة على الحل الأمثل بعد، وندخل المتغير (S_2) في مكان (X_3) ونحصل على جدول المحاولة الثالثة كالتالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_2	S_1	R_2	Sol
Z	1	0	4	0	$\frac{15}{3}$	+m	40+2m
S_2	1	0	3	1	2	−1	14
X_2	1	1	1	0	1	0	8

بعد هذه المحاولة حصلنا على الحل الأمثل لهذا النموذج، ذو العناصر التالية:

$$X_1 = 0,\ X_2 = 8,\ X_3 = 0,\ \text{Max } Z = 40$$

تمارين على طريقة السمبلكس (Simplex)

حل النماذج الخطية التالية باستعمال طريقة السمبلكس.

1) $\max Z = 4X_1 + 5X_2$

$2X_1 + 3X_2 \leq 6$

$2X_1 + 2X_2 \leq 5$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_2 = 1$, $X_1 = \frac{3}{2}$

$\max Z = 11$

2) $\max Z = 3X_1 + 2X_2$

$2X_1 + X_2 \leq 5$

$X_1 - X_2 \leq 1$

$X_1 + X_2 \leq 3$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 2$, $X_2 = 1$

$\max Z = 8$

3) $\max Z = 5X_1 + X_2 + 6X_3 + 2X_4$

$4X_1 + 4X_2 + 4X_3 + X_4 \leq 44$

$8X_1 + 6X_2 + 4X_3 + 3X_4 \leq 36$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 9$, $X_4 = 0$

$\max Z = 54$

4) $\max Z = 2X_1 + 5X_2$

$X_1 \leq 400$

$X_2 \leq 300$

$X_1 + X2 \leq 600$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 300$, $X_2 = 300$

$\max Z = 2100$

5) $\max Z = X_1 - 4X_2 + 5X_3$

$10X_1 + X_3 \leq 10$

$10X_2 + X_3 \leq 10$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 10$

$\max Z = 10$

6) $\max Z = X_1 - 4X_2 + 5X_3$

$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 4$

$X_1 - X_2 - X_3 \leq 2$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 4$

$\max Z = 20$

7) $\max Z = 2X_1 + X_2 - 3X_3 + 5X_4$

$X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 7X_4 \leq 46$

$3X_1 - X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 8$

$2X_1 + 3X_2 - X_3 + X_4 \leq 10$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0$, $X_2 = \frac{12}{7}$, $X_3 = 0$, $X_4 = \frac{34}{7}$

$\max Z = 26$

8) $\max Z = 3X_1 + 5X_2 + 4X_3$

$2X_1 + 3X_2 \leq 8$

$2X_2 + 5X_3 \leq 10$

$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 15$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = \frac{89}{41}$, $X_2 = \frac{50}{41}$, $X_3 = \frac{62}{41}$

$\max Z = \frac{765}{41}$

9) $\max Z = 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_4$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 12$

$3X_1 + 2X_2 + 3X_3 + X_4 \leq 5$

$2X_1 + X_2 + X_3 + 4X_4 \leq 7$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0$, $X_2 = \frac{5}{2}$, $X_3 = 0$,

$X_4 = 0$

$\max Z = 0$

10) $\min Z = X_1 - 2X_2$

$4X_1 + 2X_2 \leq 6$

$-X_1 + X_2 \leq 0$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0$, $X_2 = 0$

$\min Z = 0$

11) $\max Z = 14X_1 + 10X_2 + 14X_3 + 11X_4$

$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 + X_4 \leq 35$

$X_1 + X_2 + 2X_3 + 3X_4 \leq 30$

$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 \leq 40$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0$, $X_2 = 5$, $X_3 = \frac{25}{2}$,

$X_4 = 0$

$\max Z = \frac{4000}{3}$

12) $\max Z = 1000\,(X_1 + X_2 + X_3)$

$25X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 10$

$50X_1 + 100X_2 + 125X_3 \leq 125$

$20X_1 + 5X_2 \leq 103$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = \frac{1}{6}$, $X_2 = \frac{7}{6}$, $X_3 = 0$

$\max Z = 225$

13) $\max Z = 5X_1 - 2X_2 + 3X_3$

$X_1 + 3X_2 - X_3 \leq 15$

$X_1 + + 3X_3 \leq 7$

$-2X_1 + 8X_2 \leq 20$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = \frac{26}{5}$, $X_2 = 0$, $X_3 = \frac{3}{5}$

$\max Z = \frac{2}{7}$

14) $\max Z = X_1 + X_2 + X_3$

$X_1 + 7X_2 + 5X_3 \leq 13$

$4X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 1$

$6X_1 + 2X_3 \leq 1$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = \frac{3}{28}$, $X_2 = 0$, $X_3 = \frac{5}{28}$

$\max Z = = \frac{139}{5}$

15) $\min Z = 3X_1 + X_2 + 5X_3$

$X_1 + 2X_3 \geq 2$

$X_1 + X_2 + X_3 = 1$

$X_1 + 2X_2 \leq 3$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = \frac{2}{3}$, $X_2 = \frac{1}{3}$, $X_3 = 0$

min $Z = \frac{7}{3}$

16) max Z = $3X_1 - 2X_2 + X_3$

$-2X_1 + 3X_3 \geq 13$

$3X_1 + 4X_2 + 2X = 6$

$X_1 + 2X_2 - X \leq 2$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = \frac{16}{13}$, $X_2 = 0$, $X_3 = \frac{15}{13}$

max $Z = \frac{63}{13}$

17) min Z= $6X_1 + 5X_2 + 6X_3$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 2$

$X_1 - X_2 + X_3 \geq 6$

$-X_1 + X + 2X_3 \leq 3$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 3$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$

min $Z = 18$

18)max Z= $2X_1 + 3X_2 + 2{,}5X_3$

$2X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 6$

$X_1 + 2X + 1{,}5X_3 \geq 82$

$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 12$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0$, $X_2 = \frac{12}{9}$, $X_3 = \frac{8}{9}$

max $Z = \frac{110}{9}$

19)min Z= $2X_1 + 4X_2 + 35X_3$

$X_1 - 2X_2 - 6X_3 \geq 1$

$-3X_2 + X_2 + 14X_3 \geq 2$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = \frac{13}{19}$, , $X_2 = 0$, $X_3 = \frac{11}{38}$

min $Z = \frac{23}{2}$

20) max Z = $50X_1 - 10X_2 + 6X_3 + 40X_4 - 30X_5$

$X_1 + X_4 + 3X_5 = 124$

$2X_1 + X_2 + 3X_4 \leq 14$

$-2X_1 + 3X_3 - 4X_4 \geq 17$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 7$, $X_2 = 0$, $X_3 = \frac{31}{3}$, $X_4 = 0$, $X_1 = \frac{5}{3}$

max $Z = 20$

21) max Z = $3X_1 + 4X_2 + 3X_3$

$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq \frac{8}{3}$

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq \frac{7}{3}$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0$, $X_2 = \frac{4}{3}$, $X_3 = 0$

max $Z = \frac{16}{3}$

22) max Z = $3X_1 + 2X_2 - 4X_3$

$X_1 + X_2 - 2X_3 \geq 4$

$3X_1 + X_2 - 4X_3 \geq 7$

$X_j \geq 0$

Rép. $X_1 = \frac{3}{2}$, $X_2 = \frac{5}{2}$, $X_3 = 0$

$\max Z = \frac{19}{2}$

23) min $Z = X_1 + X_2 + X_3$

$X_1 + 4X_2 + 6X_3 \geq 1$

$X_1 + 2X_2 \geq 1$

$5X_1 + 3X_2 + 2X_3 \geq 1$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = \frac{3}{28}$, $X_2 = 0$, $X_3 = \frac{5}{28}$

$\max Z = 2$

24) max $Z = X_1 - X_2 - X_3$

$X_1 + X_2 + X_3 = 4$

$X_1 - X_2 + X_3 \leq 27$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 3$, $X_2 = 1$, $X_3 = 0$

$\min Z = \frac{2}{7}$

25) max $Z = 50X_1 - 10X_2 + 6X_3 + 40X_4 - 30X_5$

$X_1 + X_4 + 3X_5 = 12$

$2X_1 + X_2 + 3X_4 \leq 14$

$-2X_1 + 3X_3 - 4X_4 \geq 17$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 7$, $X_2 = 0$, $X_3 = \frac{31}{3}$, $X_4 = 0$

$\max Z = \frac{16}{3}$

26) max $Z = 3X_1 + 4X_2 + X_3$

$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq \frac{8}{3}$

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq \frac{7}{3}$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = 0$, $X_2 = \frac{4}{3}$, $X_3 = 0$

$\max Z = 362$

27) min $Z = 3X_1 + 2X_2 - 4X_3$

$X_1 + X_2 - 2X_3 \geq 4$

$X_1 + X_2 - 4X_3 \geq 7$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = \frac{3}{2}$, $X_2 = \frac{5}{2}$, $X_3 = 0$

$\max Z = \frac{2}{7}$

28) max $Z = X_1 + 3X_2 + 5X_3 + X_4 + 4X_5$

$X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 1$

$2X_1 + 4X_3 + 2X_4 + X_5 = 73$

$X_1 + 6X_2 + X_3 + 2X_5 \leq 19$

$X_j \geq 0$

Rép: $X_1 = \frac{1}{10}$, $X_2 = \frac{9}{10}$, $X_3 = 0$

$X_4 = 0$, $X_5 = \frac{34}{5}$

$\min Z = \frac{19}{2}$

المبحث الرابع

الحالات الخاصة لطريقة السمبلكس

لقد عرضنا سابقا استعمال طريقة السمبلكس في الحالة العادية ولكن في بعض المسائل يمكن أن نصادف حالات خاصة أكثر تعقيدا، ولا يمكن حلها باتباع القواعد العامة لطريقة السمبلكس، وهي بالتالي تتطلب معالجة خاصة. سنتعرض بشكل مختصر لبعض هذه الحالات ونوضح كيفية معالجتها.

1- حالة غير قابلة للحل Cas de Solution non réalisable

هذه الحالة نصادفها في النماذج الخطية التي لا تتطابق فيها القيود الفنية مع بعضها البعض، وهي الحالة التي لا يوجد فيها مجال مشترك بين القيود الفنية، أي أن منطقة الحلول الممكنة في هذه الحالة ϕ =. وفي مثل هذه الحالات، إذا كان متغير اصطناعي أو أكثر (R_i) موجودا من ضمن متغيرات الحل النهائي (في قاعدة الحل لجدول الحل الأمثل)، فهذا يدلنا على أن هذا النموذج الخطي ليس له حل أمثل ممكن.

مثال1: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\begin{cases} \max Z = X_1 + X_2 \\ X_1 - X_2 \geq 2 \\ -6X_1 + 2X_2 \geq 6 \\ X_j \geq 0 \end{cases}$$

الحل:

جدول الحل الابتدائي المقبول هو:

Z	X_1	↓ X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$-1+5m$	$-1\ m$	$0+m$	$0+m$	0	0	0
R_1	1	-1	-1	0	1	0	2
← R_2	6	2	0	1	0	1	6

نبدأ مرحلة البحث على الحل الأمثل وذلك بدخول المتغير X_2 إلى قاعدة الحل وخروج المتغير R_2، ونتيجة دخول X_2 وخروج R_2 موضحة في الجدول التالي:

(جدول المحاولة الأولى)

Z	$\mathbf{X_1}$	$\mathbf{X_2}$	$\mathbf{S_1}$	$\mathbf{S_2}$	$\mathbf{R_1}$	$\mathbf{R_2}$	**Sol**
Z	$-4+2m$	0	$+m$	$-\frac{1}{2}+\frac{m}{2}$	0	1	$3+3m$
$\mathbf{R_1}$	-2	0	-1	$-1/2$	1	$1/2$	5
$\mathbf{X_2}$	-3	1	0	$-1/2$	0	$1/2$	3

بما أن (**m**) هو عدد موجب كبير جدا فإننا نلاحظ أن صف معاملات دالة الهدف لم يعد يحتوي على القيم السالبة (بالنظر الى m) إلى وبالتالي فإن الجدول الثاني هو جدول الحل الأمثل لهذا النموذج، ولكن عندما ننظر إلى عناصر قاعدة الحل الأمثل سنجد أن من بينها يوجد متغير اصطناعي ($\mathbf{R_1}$)، وهذا يدل على أن هذا النموذج الخطي ليس له حل أمثل ($\max Z = \emptyset$).

مثال 2: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$\max Z = 3X_1 - 2X_2$

$6X_1 + 6X_2 \leq 6$

$X_1 + X_2 \geq 2$

$X_j \geq 0$

الحل: جدول الحل الابتدائي المقبول هو:

Z	↓ X_1	X_2	S_2	S_1	R_2	Sol
Z	-3-m	+2-m	0+m	0	0	0
S_1 ←	6	6	0	1	0	6
R_2	1	1	-1	0	1	2

نبدأ مرحلة البحث على الحل الأمثل وذلك بدخول المتغير (X_1) إلى قاعدة الحل ويخرج من هذه القاعدة المتغير (S_1)، والنتيجة ممثلة في الجدول التالي:

(جدول المحاولة الأولى)

Z	X_1	X_2	S_2	S_1	R_2	Sol
Z	0	+5	m	$\frac{1}{2} + \frac{m}{6}$	0	3+m
X1	1	1	0	$\frac{1}{6}$	0	1
R2	0	0	-1	$\frac{1}{6}$ -	1	1

نلاحظ أن الجدول الثاني أصبح يمثل حلا أمثلا، ولكن بالرغم من ذلك مازال المتغير الاصطناعي (R_2) موجودا في قاعدة الحل الأمثل، وهذا يعني أن هذا النموذج أيضا **ليس له حل أمثل.**

2 - حالة وجود حل أمثل لا نهائي

Cas de Solution optimale sans borne (opt Z = ∞)

إذا لاحظنا في أي مرحلة من مراحل الحل بواسطة طريقة السمبلكس أن عمود معاملات المتغير الذي يجب أن يدخل إلى قاعدة الحل (معاملات هذا المتغير في القيود الفنية (a_{ij})) أصبحت كلها سالبة ($a_{ij}<0$) أو غير محددة فهذا يعني أن الحل الأمثل **غير محدود**. أي أن : $opt\ Z=\infty$.

مثال1: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس

$$\begin{cases} \max Z = X_1 + 2X_2 \\ -2X_1 + 3X_2 \leq 9 \\ X_1 - 2X_2 \leq 2 \\ X_j \geq 0 \end{cases}$$

الحل: الجدول التالي يمثل حلا ابتدائيا مقبولا.

Z	X_1	↓ X_2	S_1	S_2	Sol
Z	-1	-2	0	0	0
← S_1	-2	3	1	0	9
S_2	1	-2	0	1	2

بداية البحث عن الأمثل يتمثل في دخول المتغيرX_2 إلى قاعدة الحل وخروج S_1 منها، فينتج الجدول الموالي:

(جدول المحاولة الأولى)

Z	X_1 ↓	X_2	S_1	S_2	Sol
Z	-7/3	0	2/3	0	6
X_2	-2/3	1	1/3	0	3
S_2	-1/3	0	2/3	1	8

لم نصل إلى الحل الأمثل بعد، والمتغير الذي يجب أن يدخل الآن إلى قاعدة الحل هو X_1، ولكن نلاحظ أن معاملات هذا المتغير في القيود الفنية كلها سالبة، وبالتالي فهذا يدلنا على أن لهذا النموذج الخطي حلولا مثلى لانهائية، أي أن: $\max Z = \infty$.

مثال 2: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس

$$\begin{cases} \max Z = 2X_1 + X_2 \\ - X_1 + X_2 \leq 1 \\ X_1 - 2X_2 \leq 1 \\ X_j \geq 0 \end{cases}$$

الحل: الجدول التالي يمثل حلا ابتدائيا مقبولا.

Z	↓ X_1	X_2	S_1	S_2	Sol
Z	- 2	- 1	0	0	0
S_1	-1	1	1	0	1
← S_2	1	-2	0	1	1

البحث عن الحل الأمثل يتطلب دخول المتغير X_1 ويخرج S_2 فنحصل على الجدول الموالي:

(جدول المحاولة الأولى)

Z	X_1	↓ X_2	S_1	S_2	Sol
Z	0	-3	0	1	1
S_1	0	-1	1	1	2
X_1	1	-2	0	1	1

من هذا الجدول نلاحظ أن المتغير الذي يجب أن يدخل الآن هو X_2، ولكن معاملات هذا المتغير في القيود الفنية أصبحت كلها سالبة، مما يدل على أن لهذا النموذج الخطي حلولا مثلى لا نهائية.

3- حالة عدم الانتظام Cas de Dégénérescence

يعتبر الحل غير منتظم إذا كان قيد فني ما أو أكثر من القيود الفنية زائد عن حاجة تكوين النموذج، بمعني أنه غير ضروري لتكوين هذا النموذج. فمثلا إذا كان هناك قيدين فنيين: الأول $X_1 \geq 10$، والثاني $X_1 \geq 20$، فإنه واضح أن القيد الثاني غير ضروري على أساس أنه محتوى داخل القيد الأول. ولكن في المسائل التي يتطلب حلها استعمال طريقة السمبلكس لا يمكن اكتشاف حالة عدم الانتظام هذه بسهولة.

ففي أي مرحلة من مراحل الحل بواسطة طريقة السمبلكس، حالة عدم الانتظام نلاحظها عندما تكون أصغر قيمة غير سالبة من القيم التي نعتمدها في إخراج المتغيرات من قاعدة الحل ليست وحيدة. أي أن أصغر قيم (b_i/a_{ij}) متساوية

لمتغيرين أو أكثر. ففي الحالات العادية للنماذج الخطية كنا نخرج من قاعدة الحل المتغير الذي تقابله أصغر قيمة غير سالبة من القيم (b_i/a_{ij})، ولكن إذا كانت هذه القيمة غير وحيدة فهذا يدلنا على حالة عدم الانتظام.

ولحل هذه المشكلة سنقوم عشوائيا بإخراج أي من المتغيرات الذين تقابلهم القيم الصغيرة المتساوية، ونواصل المحاولات حتى نصل إلى حل أمثل معين، ثم نقوم بعدها بإخراج المتغير الآخر عند النقطة التي ظهرت فيها حالة عدم الانتظام ونحاول مرة أخرى الوصول إلى حل أمثل آخر، ثم نقارن الحلول المثلى ونأخذ أحسنهم.

مثال 1: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\begin{cases} \max Z = 5X_1 - 2X_2 + 3X_3 \\ 2X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2 \\ 3X_1 - 4X_2 \leq 3 \\ X_2 + 3X_3 \leq 5 \\ X_j \geq 0 \end{cases}$$

الحل: الجدول الموالي يمثل حلا ابتدائيا مقبولا.

Z	↓ X_1	X_2	X_3	S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
Z	-5-2m	2-2m	-3+m	m	0	0	0	0
← R_1	2	2	-1	-1	1	0	0	2
S_2	3	-4	0	0	0	1	0	3
S_3	0	1	3	0	0	0	1	5

في إطار البحث عن الحل الأمثل ندخل المتغير X_1، ولكن من أجل تحديد المتغير الذي يخرج، نحسب النسب (b_i/a_{ij}) المناسبة فينتج: $3/3=1$، $2/2=1$ {$0/5$ غير محددة}.

نلاحظ إذن أن هناك قيمتين صغيرتين متساويتين، وهما القيمة الأولى والثانية، وبالتالي فهناك اختيار لإخراج R_1 أو S_2. فنختار عشوائيا للإخراج R_1 مثلا ونرى ما هي نتيجة ذلك على حل النموذج الخطي.

النتيجة معطاة في الجدول التالي:

(جدول المحاولة الأولى)

Z	X_1	X_2	↓X_3	S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	7	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}+m$	0	0	5+2m
X_1	1	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
S_2 ←	0	-7	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	1	0	0
S_3	0	1	3	0	0	0	1	5

من أجل مواصلة البحث عن الحل الأمثل ندخل الآن المتغير X_3 ونخرج S_2 فنحصل على نتيجة **المحاولة الثانية** التالية:

Z	X_1	↓X_2	X_3	S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	$\frac{-56}{3}$	0	3	-3+m	$\frac{11}{2}$	0	5+2m
X_1	1	$\frac{-4}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1
X_3	0	$\frac{-4}{3}$	1	1	-1	1	0	0
← S_3	0	15	0	-3	3	-3	1	5

ثم يدخل X_2 ويخرج S_3، فنحصل على النتيجة الممثلة في الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1 ↓	R_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	$\frac{-11}{15}$	$m+\frac{11}{15}$	$\frac{53}{30}$	$\frac{56}{45}$	$\frac{101}{9}+2m$
X_1	1	0	0	$\frac{-4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{13}{9}$
X_3 ←	0	0	1	$\frac{1}{15}$	$\frac{-1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{14}{9}$
X_2	0	1	3	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$

ثم يدخل S_1 ويخرج X_3 ونحصل على نتيجة المحاولة الرابعة:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	33	0	m	$\frac{5}{2}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{85}{3}+2m$
X_1	1	0	4	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{23}{3}$
S_1	0	0	15	1	-1	1	$\frac{14}{3}$	$\frac{70}{3}$
X_2	0	1	3	0	0	0	1	5

هذا الجدول يمثل الحل الأمثل لهذا النموذج، وعناصره هي: $X_1=\frac{23}{5}, X_2 = 5, X_3 = 0, \ Z=\frac{85}{3}$ (مع التغاضي عن قيمة 2m وهي معامل متغير اصطناعي).

ولكن لو رجعنا إلى الجدول الأول (جدول الحل الابتدائي) وأخرجنا S_2 بدل R_1 فنحصل على النتيجة التالية:

Z	X_1	↓X_2	X_3	S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	$\frac{-14}{3}-\frac{14m}{3}$	3+m-	+m	0	$\frac{5}{3}+\frac{2m}{3}$	0	5+2m
R_1 ←	0	$\frac{14}{3}$	−1	−1	1	$\frac{-2}{3}$	0	0
X_1	1	$\frac{-4}{3}$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1
S_3	0	1	3	0	0	0	1	5

يدخل X_2 ويخرج R_1، فنحصل على النتيجة التالية:

Z	X_1	X_2	↓X_3	S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	− 4	− 1	1+m	1	0	5+2m
X_2	0	1	$\frac{-3}{14}$	$\frac{-3}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{-1}{7}$	0	0
X_1	1	0	$\frac{-4}{14}$	$\frac{-4}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{1}{7}$	0	1
S_3 ←	0	0	$\frac{45}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{-3}{14}$	$\frac{1}{7}$	1	5

لم نصل إلى الحل الأمثل ويجب الآن إدخال المتغير X_3 وإخراج المتغيرS_3،

بعدها نحصل على النتيجة الموالية:

Z	X_1	X_2	X_3	↓S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	$\frac{-11}{15}$	$\frac{11}{15}$+m	$\frac{53}{45}$	$\frac{56}{45}$	$\frac{101}{9}$+2m
X_2	0	1	0	$\frac{-3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$
X_1	1	0	0	$\frac{-4}{15}$	$\frac{4}{15}$	7	$\frac{4}{15}$	$\frac{13}{9}$
X_3 ←	0	0	1	$\frac{1}{15}$	$\frac{-1}{15}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{14}{9}$

بعد دخول المتغير S_1 نحصل على نتائج المحاولة الرابعة التالية:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	R_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	11	0	m	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{85}{3}+2m$
X_2	0	1	3	0	0	0	1	5
X_1	1	0	4	0	0	$\frac{323}{45}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{23}{3}$
S_1	0	0	15	1	−1	$\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{70}{3}$

هذه النتيجة تمثل حلا أمثلا، وعند المقارنة نلاحظ أن إخراج S_2 قد أعطانا نفس الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه عند ما أخرجنا R_1 وعنده دالة الهدف تساوي أيضا $Z_{max}=\frac{85}{3}$. (مع التغاضي عن قيمة 2m).

مثال 2: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$\max Z = 4X_1 + 3X_2$

$4X_1 + 2X_2 \leq 10$

$2X_1 + 8/3X_2 \leq 8$

$X_2 \geq 1,8$

$X_1 \geq 0$

الحل:

بعد إضافة المتغير الاصطناعي R_3 إلى القيد الفني الثالث نحصل على جدول الحل الابتدائي المقبول التالي:

Z	X_1	↓ X_2	S_3	S_1	S_2	R_3	Sol
Z	-4	-3-m	+m	0	0	0	0
S_1	4	2	0	1	0	0	10
S_2	2	8/3	0	0	1	0	8
← R_3	0	1	-1	0	0	1	1,8

البحث عن المرحلة الثانية من الحل (الحل الأمثل) يتطلب إدخال المتغير X_2 وإخراج R_3 ، وبعدها نحصل على نتيجة **المحاولة الأولى**.

Z	↓X_1	X_2	S_3	S_1	S_2	R_3	Sol
Z	-4	0	-3	0	0	3+m	$\frac{5}{4}$+1,8m
S_1 ←	+4	0	2	1	0	-2	6,4
S_2	2	0	$\frac{8}{3}$	0	1	$\frac{-8}{3}$	3,2
X_2	0	1	-1	0	0	1	1,8

بعدها ندخل المتغير X_1 ونخرج إما S_1 أو S_2، ونختار على سبيل المثال للخروج S_1 فينتج:

Z	X_1	X_2	S_3↓	S_1	S_2	R_3	Sol
Z	0	0	-1	1	0	1+m	11,8 +1,8m
X_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{-1}{2}$	1,6
S_2 ←	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{-5}{3}$	0
X_2	0	1	-1	0	0	1	1,8

بعد هذه المحاولة ندخل الآن المتغير S_3 ونخرج S_2 فنحصل على نتيجة المحاولة التالية:

Z	X_1	X_2	S_3	S_1	S_2	R_3	Sol
Z	0	0	0	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{5}$	m	11,8+1,8m
X_1	1	0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{-3}{10}$	0	1,6
S_3	0	0	1	$\frac{-3}{10}$	$\frac{3}{5}$	-1	0
X_2	0	1	0	$\frac{-3}{10}$	$\frac{3}{5}$	0	1,8

وبهذا الجدول نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل المتمثل في:

($Z=11,8$, $X_2=1,8$, $X_1=1,6$) مع التغاضي عن قيمة 1,8m.

الآن لو رجعنا إلى الجدول الثاني (جدول المحاولة الأولى) واخترنا للخروج S_2 بدل S_1 فيكون الجدول الثالث كالتالي:

Z	X_1	X_2	S_3	S_1	S_2	R_3	Sol
Z	0	0	$\frac{7}{3}$	0	4	$\frac{-7}{3}$+m	11,8+1,8m
S_1	0	0	$\frac{-10}{3}$	1	-4	$\frac{10}{3}$	0
X_1	1	0	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{-4}{3}$	1,6
X_2	0	1	-1	0	0	1	1,8

وهو يمثل نفس الحل الأمثل السابق عندما اخترنا للخروج S_1.

ملاحظة: عندما نصل إلى حالة عدم انتظام فإن إخراج المتغيرات ذوات القيم الصغرى المتساوية لا يعطينا بالضرورة نفس النتائج.

4- حالة وجود حلول مثلى متعددة متساوية

Cas de Solutions opt. égales multiples

هناك بعض النماذج الخطية التي لها أكثر من حل أمثل لكن هذه الحلول متساوية، بمعنى يوجد هناك نسب متعددة (قيم متعددة) لمتغيرات الحل التي تعطينا نفس الحل الأمثل. وعند استعمال طريقة السمبلكس في حل هذه الفئة من المسائل، نلاحظ أنه في محاولة من المحاولات – وحسب قواعد هذه الطريقة- نلاحظ أننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل، ولكن بالرغم من ذلك لو أدخلنا متغير غير موجود في قاعدة الحل الأمثل، ويكون معامله في صف معاملات دالة الهدف يساوي **(0)**، فإننا نسجل أنه لا يزيد ولا ينقص في الحل المتوصل إليه (أي أن النتيجة تبقى نفسها التي حصلنا عليها في الحل السابق)، وبالتالي فإن هذا الحل الناتج عن إدخال هذا المتغير هو أيضا حل أمثل مساوي للحل السابق.

مثال1: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$\max Z = 2{,}5X_1 + X_2$

$3X_1 + 5X_2 \leq 15$

$5X_1 + 2X_2 \leq 10$

$X_j \geq 0$

الحل: بعد التحويل وتكوين جدول الحل الابتدائي المقبول نحصل على:

Z	↓ X_1	X_2	S_1	S_2	Sol
Z	-2,5	-1	0	0	0
S_1	3	5	1	0	15
← S_2	5	2	0	1	10

مرحلة البحث عن الحل الأمثل تتطلب إدخال المتغير X_1 وإخراج S_2.

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol
Z	0	0	0	$\frac{1}{2}$	5
S_1	0	$\frac{19}{5}$	1	$\frac{-3}{5}$	9
X_1	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	2

نلاحظ الآن أننا قد توصلنا إلى حل أمثل $(Z_{max}=5, X_2=0, X_1=2)$، ولكن مع ذلك نلاحظ أن متغير القرار X_2 غير موجود في قاعدة الحل الأمثل ولكن معامله في صف دالة الهدف = 0، فلو جربنا وأدخلناه إلى قاعدة الحل، فنتيجة الحل الأمثل سوف تبقى نفسها، أي أنه سيعطينا حلا أمثلا مساوي للسابق. ندخل إذن المتغير X_2 ونخرج S_1 بمراعاة النسب ($9\div 5/19$، $2 \div 5/2$) ، فينتج لدينا جدول الحل الأمثل التالي:

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol
Z	0	0	0	$\frac{1}{2}$	5
X_2	0	1	$\frac{5}{19}$	$\frac{-3}{19}$	$\frac{45}{19}$
X_1	1	0	$\frac{-2}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{20}{19}$

ونجد أن الحل الأمثل بقي نفسه، ومعنى هذا أن الوضعية $(\frac{20}{19} = X1 , \frac{45}{19} = X_2)$ هي أيضا تشكل حلا أمثلا لهذا النموذج الخطي، وبالتالي فإن هذا النموذج له عدة حلول متساوية.

مثال 2: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$$\max Z = -X_1 + 2X_2$$
$$-X_1 + X_2 \leq 1$$
$$-X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$X_1 \leq 6 \ , X_j \geq 0$$

الحل: بعد التحويل وتكوين جدول الحل الابتدائي المقبول نحصل على:

Z	X_1	↓ X_2	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	+1	-2	0	0	0	0
← S_1	-1	1	1	0	0	1
S_2	-1	2	0	1	0	4
S_3	1	0	0	0	1	6

في إطار البحث عن الحل الأمثل ندخل المتغير X_2 ونخرج S_1، فينتج لدينا الجدول التالي:

Z	↓ X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	-1	0	2	0	0	2
X_2	-1	1	1	0	0	1
← S_2	1	0	-2	1	0	2
S_3	1	0	0	0	1	6

لم نصل إلى الحل الأمثل وندخل الآن المتغير X_1 ونخرج S_2، فنحصل على النتيجة التالية:

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	2	0	4
X_2	0	1	-1	2	0	3
X_1	1	0	-2	2	0	2
S_3	0	0	2	-2	1	4

لقد وصلنا إلى الحل الأمثل **($X_1=2, X_2=3, Z = 4$)**، ولكن نلاحظ أن المتغير S_1 مثلا غير موجود في قاعدة الحل الأمثل وأن معامله في صف معاملات دالة الهدف 0-، فلو أدخلناه فإنه سوف لن يؤثر على الحل الأمثل المحصل عليه سابقا: **($Z=4$)**.

نحسب النسب التي تحدد المتغير الذي يلزم أن يخرج من قاعدة الحل فنجده S_3، ثم بعد ذلك نحصل على جدول الحل التالي:

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	2	0	4
X_2	0	1	0	0	1/2	5
X_1	1	0	0	0	1	6
S_1	0	0	1	-1	1/2	2

إذن الحل الأمثل الناتج هو: **($X_1=6, X_2=5, Z= 4$)** وهو مساوي للحل الأمثل السابق أيضا.

5 – حالة تساوي بعض قيم معاملات دالة الهدف:

لقد أشرنا سابقا أنه من أجل اختيار المتغير الذي يدخل إلى قاعدة الحل فإننا ننظر إلى معاملات دالة الهدف وندخل المتغير الذي يكون معامله في دالة الهدف هو أصغر قيمة سالبة (في حالة تعظيم دالة الهدف)، أو ندخل المتغير الذي يكون معامله هو أكبر قيمة موجبة (في حالة البحث عن تدنية دالة الهدف).

إذا كنا بصدد البحث عن القيمة المثلى لدالة الهدف لنموذج خطي معين وظهرت في صف معاملات دالة الهدف قيمتين (أو أكثر) سالبتين صغيرتين

متساويين (في حالة **maxZ**) أو موجبتين كبيرتين متساويتين (في حالة **minZ**)، فإنه في هذه الحالة نختار للإدخال أي واحد من المتغيرات المقابلة لهم عشوائيا، لأن إدخال المتغير الآخر سوف يعطي نفس الحل الأمثل ولا داعي لتجريب إدخال الاثنين.

مثال: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس.

$\text{Max } Z = 5X_1 + X_2 + 4X_3 + 4X_4$

$4X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 100$

$X_1 + X_3 + 2X_4 \leq 40$

$X_1 + 2X_3 + 4X_4 \leq 120$

$X_1 \leq 15 \ , \ X_2 \leq 15$

$X_3 \leq 15 \ , \ X_4 \leq 15$

$X_j \geq 0$

الحل: الجدول التالي يحتوي على عناصر الحل الابتدائي المقبول.

Z	↓ X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	Sol
Z	-5	-1	-4	-4	0	0	0	0	0	0	0	0
S_1	4	1	2	0	1	0	0	0	0	0	0	10
S_2	1	0	1	2	0	1	0	0	0	0	0	40
S_3	1	0	2	4	0	0	1	0	0	0	0	120
← S_4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	15
S_5	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	15
S_6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	15
S_7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	15

بدء مرحلة البحث عن الحل الأمثل تتطلب إدخال المتغير X_1 وإخراج المتغير S_4، بعد ذلك نحصل على نتيجة المحاولة الأولى كالتالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	Sol
Z	0	- 1	- 4	- 4	0	0	0	5	0	0	0	75
S_1	0	1	2	0	1	0	0	-4	0	0	0	40
S_2	0	0	1	2	0	1	0	-1	0	0	0	25
S_3	0	0	2	4	0	0	1	-1	0	0	0	105
X_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	15
S_5	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	15
S_6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	15
S_7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	15

بعد هذه المحاولة نلاحظ أن من بين معاملات دالة الهدف الآن يوجد قيمتين سالبتين هما الأصغر من بين المعاملات الأخرى، وهما القيمتين (-4, -4) وهما معاملات المتغير (X_3) والمتغير (X_4) وهذا يعني أننا نستطيع إدخال أي واحد منهما، وفي هذه الحالة فإننا ندخل أي واحد منهما فقط ونواصل المحاولات حتى نصل إلى حل أمثل، لأننا لو أدخلنا المتغير الآخر سوف نحصل على حل أمثل متساوي.

فندخل عشوائيا المتغير (X_3) ونخرج (S_6)، فنحصل على نتيجة المحاولة الثانية

كالتالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	Sol
Z	0	- 1	0	- 4	0	0	0	5	0	4	0	135
S_1	0	1	0	0	1	0	0	-4	0	-2	0	10
S_2	0	0	0	2	0	1	0	-1	0	-1	0	10
S_3	0	0	0	4	0	0	1	-1	0	-2	0	75
X_1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	15
S_5	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	15
X_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	15
S_7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	15

ونستمر في البحث عن الحل الأمثل حتى نصل إليه من خلال الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	Sol
Z	1	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	180
X_2	4	1	0	0	1	0	0	0	0	-2	0	70
X_4	0,5	0	0	1	0	0,5	0	0	0	-0,5	0	12,5
S_3	-1	0	0	0	0	-2	1	0	0	-1	0	40
S_4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	15
S_5	4	0	0	0	-1	0	0	0	1	-2	0	65
X_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	15
S_7	-0,5	0	0	0	0	-0,5	0	0	0	0,5	1	2,5

تمارين على الحالات الخاصة لطريقة Simplex

حل النماذج الخطية التالية باستعمال طريقة السمبلكس.

1)min $Z = -3X_1 + 2X_2 + X_3$

$-0,75X_1 + X_2 \geq 1$

$-X_1 + X_2 + X_3 \geq 1$

$X_j \geq 0$

Rép : min $Z = \infty$

2)min $Z = 4X_1 + X_2 + 4X_3$

$-X_1 - X_2 + X_3 \geq 1$

$2X_1 + X_2 - 4X_3 \geq 2$

$X_j \geq 0$

Rép : min $Z = \infty$

3)maxZ $= 60X_1 + 60X_2 + 90X_3 + 90X_4$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 15$

$7X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 2X_4 \leq 1$

$X_1 + 5X_2 + 10X_3 + 15X_4 \leq 1$

$X_j \geq 0$

Rép : $(X_1 = \frac{7}{61}, X_2 = 0, X_3 = \frac{4}{61}, X_4 = 0)$

max $Z = \frac{780}{61}$

4) max $Z = 10X_1 + 30X_2$

$3X_1 + 2X_2 \geq 6$

$6X_1 + X_2 \geq 6$

$X2 \geq 23$

$X_1 \geq 0$

Rép : cas de dégénérescence

$(X_1 = \frac{2}{3}, X_2 = 2, X_3 = 0, X_4 = 0)$

max $Z = \frac{200}{3}$

5) max $Z = 5X_1 + 3X_2$

$X_1 + X_2 \leq 5$

$X_1 \geq 3, \ X_2 \geq 3$

$X_j \geq 0$

Rép : max $Z = \emptyset$

6)max $Z = 10X_1 + 6X_2 + 2X_3 + 9X_4$

$6X_1 + 5X_2 + 10X_3 + 10X_4 \leq 200$

$2X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4 = 40$

$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 3X_4 = 70$

$X_j \geq 0$

Rép : cas de dégénérescence

$X_1 = 5, X_2 = 30, X_3 = 0, X_4 = 0$

max $Z = 20$

7) max $Z = X_1 - X_2$

$-2X_1 + 3X_2 \leq 9$

$X_1 - X_2 \leq 2$

$X_1 + X_2 \leq 8$

$X_j \geq 0$

Rép :cas de solutions multiples égales

$(X_1 = 2, X_2 = 0)$, $(X_1 = 5, X_2 = 3)$

min $Z = 2$

8) max $Z = 2X_1 + 5X_2 + 4X_3$

$-2X_1 - X_2 + X \geq 1$

$X_1 + 2X_2 - 4X_3 \geq 2$

$X_j \geq 0$

Rép : min $Z = \varnothing$

9)max $Z = -9X_1 - 2X_2 + 8X_3$

$2X_1 - X_2 + X_3 \geq 1$

$X_1 \geq 3$, $X_2 \leq 1$

$X_j \geq 0$

Rép : max $Z = \infty$

10) max $Z = 4X_1 + 3X_2$

$4X_1 + 2X_2 \leq 10$

$2X_1 + \frac{8}{3}X_2 \leq 8$

$X_2 \geq 1,8$

$X_1 \geq 0$

Rép : cas de dégénérescence

$X_1 = 1,6$, $X_2 = 1,8$

max $Z = 11,8$

11) max $Z = X_1 + X_2$

$X_1 - 3X_2 \geq 2$

$-2X_1 + 5X_2 \leq 6$

$X_j \geq 0$

Rép : max $Z = \infty$

12)max $Z = 3X_1 - 2X_2$

$6X_1 + 6X_2 + X_3 \leq 62$

$X_1 + X_2 \geq 2$

$X_j \geq 0$

Rép : min $Z = \varnothing$

المبحث الخامس

مسألة الثنائية في البرمجة الخطية

Le problème de dualité

لكل نموذج خطي ابتدائي (**Primaire**)، يكون دائما ممكنا وضع نموذج خطي له يسمى ثنائي أو مرافق (**Dual**)، من الناحية الرياضية هذين النموذجين يشكلان زوج ذو تناظريه مطلقة: سوف نرى فيما بعد أن النموذج الخطي الثنائي لنموذج ثنائي ما هو إلا النموذج الخطي الابتدائي لهذا الأخير.

في الميدان الاقتصادي، النموذج الخطي الابتدائي هو الأكثر أهمية: فهو الذي نريد حله، ولكن الشكل الثنائي لا يقل أهمية عن الابتدائي. سنحاول فيما بعد تفسير متغيرات النموذج الخطي الثنائي بأنها تعبر عن ربح أو تكلفة الفرص البديلة للموارد المستعملة والممثلة في النموذج الخطي الابتدائي، أو هي تعكس حساسية دالة الهدف للموارد المختلفة المستعملة، وأهمية هذه الموارد في تحقيق قيمة مثلى لدالة الهدف.

أولا: تشكيل النموذج الثنائي لنموذج خطي ابتدائي معطى:

I- تكوين النموذج الثنائي لنموذج خطي ابتدائي من الشكل التالي:

$\text{opt } Z = \sum C_j X_j$

$\sum a_{ij} X_j \leq b_i$

$X_j \geq 0,\ b_i \geq 0$

سنبدأ أولا بتكوين الشكل الثنائي لنموذج خطي ابتدائي من الشكل الذي تكون قيوده الفنية كلها في شكل أصغر أو تساوي، فإذا رمزنا للمتغيرات الثنائية بالرمز **(Y_i)** ، فإن النموذج الثنائي للشكل الخطي الابتدائي السابق يكون كالتالي:

$$\text{opt } Z' = \sum b_i Y_i$$

$$\sum a_{ij} Yi \geq C_j$$

$$Y_i \geq 0 \;, C_j \geq 0$$

مثال: لدينا الشكل الابتدائي للنموذج الخطي التالي:

$$\max Z = 300X_1 + 600X_2 + 900X_3$$

$$100X_1 + 60X_2 + 30X_3 \leq 1000$$

$$10X_1 + 30X_2 + 60X_3 \leq 1000$$

$$X_j \geq 0$$

فيكون شكله الثنائي كالتالي، وذلك بافتراض المتغيرات الثنائية التالية **(Y_2, Y_1)**:

$$\min Z' = 1000Y_1 + 1000Y_2$$

$$100Y_1 + 10Y_2 \geq 300$$

$$60Y_1 + 30Y_2 \geq 600$$

$$30Y_1 + 60Y_2 \geq 900$$

$$Y_i \geq 0$$

تشكيل النموذج الثنائي لهذا الصنف من النماذج الخطية الابتدائية يخضع للقواعد التالية:

* إذا كان معيار أمثليه دالة الهدف هو**(max)** في الشكل الابتدائي فإنه يتحول إلى **(min)** في الشكل المرافق والعكس صحيح.

* كل قيد فني في النموذج الابتدائي يناسبه (يقابله) متغير ثنائي (Y_i)، بمعنى أن عدد المتغيرات الثنائية (Y_i) في النموذج الثنائي يساوي عدد القيود الفنية في الشكل الابتدائي والعكس صحيح.

* كل متغير في النموذج الابتدائي (يقابله) قيد فني في النموذج الثنائي مشكل كالتالي:

معاملات المتغيرات الثنائية في القيد الفني الثنائي الأول هي عبارة عن معاملات المتغير الأول (X_1) في كل القيود الفنية في النموذج الابتدائي: أي أن معاملات المتغير الأول في كل القيود الفنية للنموذج الابتدائي وهي: ($a_{m1}, ..., a_{31}, a_{21}, a_{11}$)

تكون معامـلات كل المتغيـرات الثنائيـــة ($Y_1 , Y_2 , Y_3 , ..., Y_m$) في القيد الفني الثنائي الأول.

بمعنى: $a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + ...+ a_{m1}Y_m \geq C_1$ ، وهكذا بالنسبة للقيود الفنية الثنائية الأخرى:

$$a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 + ... + a_{m2}Y_m \geq C_2$$
$$a_{13}Y_1 + a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 + ... + a_{m3}Y_m \geq C3$$

....

$$a_{1n}Y1 + a_{2n}Y_2 + ...+ a_{mn}Yn \geq C_n$$

* معاملات المتغيرات الثنائية في دالة هدف النموذج الثنائي هي على التوالي عناصر الطرف الأيمن من القيود الفنية للنموذج الابتدائي، أي (bi). ويصبح شكل دالة الهدف في النموذج الثنائي هو:

$$\textbf{opt } Z' = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + ... + b_m Y_m$$

* الطرف الأيمن من القيود الفنية للنموذج الثنائي هي معاملات دالة الهدف للنموذج الابتدائي (C_j).

* إن نظرية الثنائية في البرمجة الخطية تبين أنه عند الحل الأمثل يلزم أن تكون قيمة دالة الهدف في النموذج الأصلي تساوي تيمة دالة الهدف في النموذج الثنائي: (**optZ'= optZ**)، ما عدا بعض الحالات الخاصة، التي تكون فيها العلاقة كالتالي:

– إذا كان النموذج الابتدائي ليس له حل أمثل (**optZ=Ø**) فإن النموذج المرافق له يكون له حل أمثل غير محدود (**optZ=∞**) والعكس أيضا صحيح.

– إذا كان النموذج الابتدائي له حل أمثل غير منتظم (**sol. Dégénéré**) فإن النموذج الثنائي المقابل له يكون له عدة حلول مثلى متساوية والعكس أيضا صحيح.

* اتجاه القيود الفنية في النموذج الثنائي يكون كالتالي:

– إذا كان اتجاه **كل** القيود الفنية في النموذج الابتدائي على شكل أكبر **أو** تساوي (≥) فيجب عكسها في النموذج الثنائي وتصبح كلها على شكل أصغر أو تساوي (≤) والعكس أيضا صحيح.

– إذا كان اتجاه **كل** القيود الفنية في النموذج الابتدائي على شكل معادلات، فإنه يجب أولا تحويل اتجاه **كل** هذه القيود الفنية إلى شكل أكبر أو تساوي في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في شكل (**min**)، ثم بعد ذلك تكوين الشكل الثنائي للنموذج المعطى، الذي تكون القيود الفنية فيه في شكل أصغر أو تساوي ودالة الهدف في شكل (**max**). أو تحويل اتجاه كل القيود الفنية إلى شكل أصغر أو تساوي في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في شكل (**max**)، ثم بعد ذلك تكوين الشكل الثنائي للنموذج المعطى، الذي تكون القيود الفنية فيه في شكل أكبر أو تساوي ودالة الهدف في شكل (**min**).

– إذا كانت القيود الفنية في النموذج الابتدائي عبارة عن مزيج من القيود الفنية ($\leq, \geq, =$)، فإنه يجب إتباع نفس الخطوات كما في الحالة السابقة (حالة المعادلات).

* كل المتغيرات (في الشكل الابتدائي والثنائي) لا سلبية.

II – النموذج الثنائي لنموذج خطي ابتدائي من الشكل التالي:

$$\text{opt } Z = \sum C_j X_j$$
$$\sum a_{ij} X_j = b_i$$
$$X_j \geq 0 , \quad b_i \geq 0$$

في حالة ما إذا كانت كل القيود الفنية في شكل معادلات فإنه يجب أن نحول هذا الشكل الابتدائي للنموذج الخطي إلى الشكل الذي تكون قيوده من الشكل أقل أو يساوي ($\leq$) إذا كان مقياس الأمثلة لدالة الهدف هو **(max)** أو تحويلها إلى شكل أكبر أو تساوي ($\geq$) في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في شكل **(min)**.

فإذا كان لدينا قيد فني ما على شكل معادلة، أي: ($a_{ij} X_j = b_i$)، فيلزم أن نحوله إلى شكل متراجحة، مع العلم أن أي معادلة تعادل متباينتين ذات اتجاهين متعاكسين كما يلي:

$$\begin{matrix} a \leq b \\ a \geq b \end{matrix} \Leftrightarrow a = b$$

هذا يعني أن أي قيد فني في شكل معادلة يجب أن نعوضه بمتراجحتين متعاكستي الاتجاه، ثم ننظر بعد ذلك إلى دالة الهدف فإذا كانت في شكل **(min)** فإنه يجب تحويل **كل** القيود الفنية الناتجة إلى شكل أكبر أو تساوي أي:

$$\begin{matrix} a \geq b \\ -a \geq -b \end{matrix} . \Leftrightarrow a = b$$

أما إذا كانت دالة الهدف في شكل **(max)** فإنه يجب تحويل **كل** القيود الفنية إلى شكل أصغر أو تساوي أي: $a = b \Leftrightarrow \begin{matrix} a \leq b \\ -a \leq -b \end{matrix} .$

وبالتالي فإن القيد الفني من الشكل $\sum a_{ij}X_j = b_i$ يتحول إلى الشكل

$\begin{matrix} \sum\ aij\, Xj\ \leq bi \\ -\sum\ aij\, Xj \leq -\ bi \end{matrix}$ إذا كانت دالة الهدف في شكل(max)، أو يتحول إلى

شكل أكبر أو تساوي $\begin{matrix} \sum\ aij\, Xj\ \geq bi \\ -\sum\ aij\, Xj \geq -\ bi \end{matrix}$ في حالة العكس.

بعد هذا التحويل نقوم بتكوين النموذج الثنائي المقابل للنموذج الابتدائي السابق وذلك بإتباع القواعد العامة المشار إليها سابقا.

مثال: ليكن النموذج الخطي الابتدائي التالي:

$$\max Z = C_1 X_1 + C_2 X_2$$
$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 = b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 = b_2$$
$$Xj \geq 0$$

من أجل تكوين الشكل المرافق لهذا النموذج نقوم أولا بتحويل قيوده الفنية من شكل معادلات إلى متراجحات، وذلك بتعويض كل متراجحة بمعادلتين متعاكستي الاتجاه التي تكافآنها، ثم بعد ذلك نحول اتجاه كل المتراجحات إلى شكل أصغر أو تساوي (≤) ما دام مقياس الأمثلية لدالة الهدف هو (max) وذلك كالتالي:

$$(a_{11}\ X_1+a_{12}X_2= b_1) \Leftrightarrow \begin{matrix} a11X1+a12\,X2 \leq b1 \\ a11\,X1+a12\,X2 \geq\ b1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a11X1+a12\,X2 \leq b1 \\ -\ a11\,X1+a12\,X2 \leq -b1 \end{matrix}$$

$$(a_{21}X_1+a_{22}X_2=b_2) \Leftrightarrow \begin{matrix} a21\,X1+a22\,X2 \leq b2 \\ a21\,X1+a22\,X2 \geq\ b2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a21\,X1+a22\,X2 \leq\ b2 \\ -\ a21\,X1+a22\,X2j \leq -b2 \end{matrix}$$

لقد حولنا الآن كل القيود الفنية إلى شكل أصغر أو تساوي (≤)، بعدها يصبح من الممكن تكوين الشكل الثنائي للنموذج السابق، الذي يتكون من متغيرين اثنين (Y_2, Y_1). لكن في هذه الحالة يجب أيضا تقسيم كل متغير من هذين المتغيرين إلى شقين: $(\ddot{Y}1, \dot{Y}_1)$,$(\ddot{Y}2, \dot{Y}_2)$ بحيث نعوض المتغير (Y_1) بالفرق $(\dot{Y}- \ddot{Y}_1)$

والمتغير (Y_2) بالفرق $(\ddot{Y}2-\ddot{Y}_2)$، ونكون النموذج الثنائي بإتباع القواعد العامة المشار إليها سابقا كالتالي:

$$\min Z = b1\ddot{Y}_1 - b1\dot{Y}1 + b_2\ddot{Y}_2 - b_2\ddot{Y}_2$$
$$a_{11}\ddot{Y}_1 - a_{11}\ddot{Y}1 + a_{21}\ddot{Y}_2 - a_{21}\ddot{Y}_2 \geq C_1$$
$$a_{12}\ddot{Y}_1 - a_{12}\ddot{Y}1 + a_{22}\ddot{Y}_2 - a_{22}\ddot{Y}_2 \geq C_2$$

من أجل الاختصار نخرج المتغيرات خارج الأقواس كالتالي:

$$\min Z = b_1 (\ddot{Y}_1 - \ddot{Y}1) + b_2 (\ddot{Y}_2 - \ddot{Y}_2)$$
$$a_{11}(\ddot{Y}_1 - \ddot{Y}1) + a_{21}(\ddot{Y}_2 - \ddot{Y}_2) \geq C_1$$
$$a_{12}(\ddot{Y}_1 - \ddot{Y}1) + a_{22}(\ddot{Y}_2 - \ddot{Y}_2) \geq C_2$$

ثم نعيد تعويض المقدار $(Y1 - Y_1)$ بالمتغير (Y_1) والمقدار $(Y2 - Y_2)$ بالمتغير (Y_2) فنحصل على الصيغة التالية:

$$\min Z = b_1 Y_1 + b_2 Y_2$$
$$a_{11} Y_1 + a_{22} Y_2 \geq C_1$$
$$a_{11} Y_1 + a_{22} Y_2 \geq C_2$$

Y_1(متغير حر) , Y_2(متغير حر)

مع التأكيد على أن المتغيرين (Y_2, Y_1)، هي متغيرات حرة بمعنى يمكن أن تأخذ كل القيم بما فيها القيم السالبة وإذا أخذت قيما سالبة فيجب أن نقبلها. فإذا كان (Y_2) أكبر من (Y_2) فإن المتغير (Y_2) يكون موجبا وإذا كان (Y_2) مساويا لـ(Y_2) فيكون (Y_2) مساويا للصفر أما إذا كان (Y_2) من أصغر (Y_2) ففي هذه الحالة تكون قيمة (Y_2) سالبة. نفس الشيء يمكن قوله بالنسبة للمتغير (Y_1).

من الناحية التطبيقية فإنه من أجل تكوين الشكل الثنائي لنموذج خطي ابتدائي ذو قيود فنية كلها في شكل معادلات يكفي أن نتذكر أن أي قيد فني في

النموذج الابتدائي في شكل معادلة يقابله متغير ثنائي **حر** والعكس أيضا صحيح:
إذا كان أي متغير في النموذج الابتدائي **حر** فإن ذلك يعني أن القيد الفني الثنائي الذي يقابله يكون في شكل معادلة.

III - تكوين النموذج الثنائي لنموذج خطي ابتدائي من الشكل:

$$\text{opt } Z = \sum C_j X_j$$
$$\sum a_{ij} X_j \geq b_i$$
$$X_j \ (\text{حر}); \quad b_i \geq 0$$

وهذا الشكل من النماذج الخطية هو عكس الحالة السابقة (الثانية)، والنموذج الثنائي المناسب له يكون من صنف الشكل الابتدائي للحالة السابقة أي:

$$\text{opt } Z = \sum b_i Y_i$$
$$\sum a_{ji} Y_i = C_j$$
$$C_j \geq 0 \ , \ Y_i \geq 0$$

وذلك بإجراء العملية العكسية للحالة السابقة، أي تحويل القيود الفنية من شكل متباينات إلى شكل معادلات.

IV - تكوين النموذج الثنائي لنموذج خطي ابتدائي من الشكل:

$$\text{opt } Z = \sum C_j X_j$$
$$\sum a_{ij} X_j \geq b_i$$
$$X_j \geq 0 \ , \quad b_i \geq 0$$

والشكل الثنائي لهذه الحالة هو:

$$\text{opt } Z = \sum b_i Y_i$$
$$\sum a_{ij} Y_i \leq C_j$$
$$Y_i \geq 0 \ , C_j \geq 0$$

V - تكوين النموذج الثنائي لنموذج خطي ابتدائي يحتوي على مزيج من القيود الفنية:

في حالة ما إذا كان النموذج الابتدائي يتكون من مزيج من القيود الفنية ($\leq , \geq , =$) فإنه يجب أن تحول هذا الشكل الابتدائي للنموذج الخطي إلى الشكل الذي تكون قيوده الفنية كلها من الشكل أقل أو يساوي ($\leq$) إذا كان مقياس الأمثلة لدالة الهدف هو(**max**) أو تحويلها كلها إلى شكل أكبر أو تساوي ($\geq$) في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في شكل (**min**).

ثم بعد ذلك نكون النموذج الثنائي له بإتباع القواعد المذكورة سابقا.

	اتجاه القيود الفنية في الابتدائي	اتجاه القيود الفنية في الثنائي يجب أن تكون كلها $\geq$		اتجاه القيود الفنية في الابتدائي	اتجاه القيود الفنية في الثنائي يجب أن تكون كلها $\leq$
إذا كانت دالة الهدف **min Z**	$\geq$	يبقى كما هو $\geq$	إذا كانت دالة الهدف **max Z**	$\leq$	يبقى كما هو $\leq$
	$\leq$	(بضربه في - 1) يتحول إلى $\geq$		$\leq$	(بضربه في - 1) يتحول إلى $\leq$
	=	(نعوض المعادلة بمتراجحتين متعاكستي الاتجاه) $\leq$ $\geq$ الأولى نضربها في - 1 فتتحول إلى $\geq$ والثانية تبقى كما هي $\geq$		=	(نعوض المعادلة بمتراجحتين متعاكستي الاتجاه) $\leq$ $\geq$ الثانية نضربها في 1- فتتحول إلى $\leq$ والأولى تبقى كما هي $\leq$

مثال: كون النموذج الثنائي للنموذج الخطي الابتدائي التالي.

$$\text{Min } Z = C_1X_1 + C_2X_2$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \geq b_2$$

$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 \leq b_3$

$X_j \geq 0$

نفترض المتغيرات الثنائية y_3, y_2, y_1، ثم نقسم المتغير y_1 إلى متغيرين (Y_1) و(Y_1)، بحيث أن كلا المتغيرين غير سالبين.

نقوم بعد ذلك بتعويض القيد الفني الأول (المعادلة) بمتراجحتين متعاكستي الاتجاه تكافئانها $\begin{matrix} a11X1+a12X2 \leq b1 \\ a11X1+a12X2 \geq b1 \end{matrix}$ ، وما دام أن مقياس الأمثلية هو (**Min**) فيجب أن نحول اتجاه القيود الفنية في شكل أكبر أو تساوي (≥)، من أجل ذلك نضرب المتراجحة الأولى في **(-1)** فيتحول اتجاهها إلى الاتجاه المطلوب وتصبح: $\begin{matrix} a11X1+a12X2 \geq b1 \\ -a11X1+a12X2 \geq -b1 \end{matrix}$. أما القيد الفني الثالث فنضربه أيضا في (1-) فيتحول اتجاهه إلى شكل أكبر أو تساوي، وبالتالي تصبح كل القيود الفنية في شكل أكبر أو تساوي .

ما دام أن القيد الفني الأول هو في شكل معادلة فإن المتغير الثنائي الذي يقابله وهو (y_1) يكون متغيرا حرا وهو يساوي المقدار $(\ddot{Y}1 - \dot{Y}1)$.

بإتباع القواعد العامة، المشار إليها سابقا، يصبح النموذج الثنائي المطلوب هو:

$\max Z = b_1Y_1 + b_2Y_2 - b_3Y_3$

$a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 - a_{13}Y_3 \leq C_1$

$a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 - a_{32}Y_3 \leq C_2$

Y_1 (حر), $Y_2 \geq 0$

ثانيا: العلاقة بين الحل الأمثل الأصلي والمرافق:

يمكن استنتاج عناصر الحل الأمثل للنموذج الثنائي من عناصر الحل الأمثل للنموذج الابتدائي كالتالي:

1- $optZ = optZ'$ (ما عدا الحالات الخاصة المشار إليها سابقا والتي لا يكون فيها الحلان متساويان).

2- معاملات متغيرات الحل الابتدائي (S_i) أو (R_i) في جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي تساوى قيمة متغيرات الحل الأمثل للنموذج الثنائي والعكس أيضا صحيح، أي معاملات متغيرات الحل الابتدائي في الحل الأمثل للنموذج الثنائي تساوي قيمة متغيرات الحل الأمثل للنموذج الابتدائي.

مثال: حل النموذج الخطي التالي باستعمال طريقة السمبلكس:

$\min Z = 6X_1 + 5X_2$

$2X_1 + X_2 \geq 5$

$3X_1 + 4X_2 \geq 9$

$X_j \geq 0$

الحل: بعد تحويله إلى شكله القياسي وإضافة المتغيرات الاصطناعية نحصل على جدول الحل الابتدائي المقبول التالي:

Z	X_1	↓ X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	SOL
Z	-6+5m	-5+5m	-m	-m	0	0	14m
← R_1	2	1	-1	0	1	0	5
R_2	3	4	0	-1	0	1	9

من أجل البحث عن الحل الأمثل ندخل إلى قاعدة الحل المتغير X_2 في مكان R_2.

ونحصل على جدول المحاولة الأولى التالي:

Z	↓X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	SOL
Z	$\frac{-9}{4}+\frac{5m}{4}$	0	-m	$\frac{-5}{4}+\frac{m}{4}$	0	$\frac{5}{4}-\frac{5m}{4}$	$\frac{45}{4}+\frac{11m}{4}$
←R_1	5/4	0	-1	1/4	1	-1/4	11/4
X_2	3/4	1	0	-1/4	0	1/4	9/4

ثم يدخل X_1 ويخرج R_1، ونحصل على جدول المحاولة الثانية التالي:

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	SOL
Z	0	0	-9/5	-4	9/5-m	4/5-m	16,2
X_1	1	0	-4/5	1/5	4/5	-1/5	11/5
X_2	0	1	3/5	-2/5	-3/5	2/5	3/5

وهذا الجدول يمثل الحل الأمثل لهذا النموذج الخطي.

حيث: $\{Z_{min} = 16,2,\ X_2 = 3/5,\ X_1 = 11/5\}$

نلاحظ الآن أن قيم معاملات متغيرات الحل الابتدائي في جدول الحل الأمثل لهذا النموذج الابتدائي، أي معاملات (R_2,R_1) في هذا الجدول (جدول الحل الأمثل) تساوي على التوالي (4/5,9/5) وذلك بالاستغناء عن $(-m)$. سنرى فيما بعد – عند حل الشكل الثنائي لهذا النموذج الابتدائي– أن القيم المثلى لمتغيراته (قيم Y_2,Y_1) تساوي بالضبط(4/5,9/5). بمعنى قيم متغيرات الحل الأمثل للنموذج

الثنائي تساوي قيم معاملات متغيرات الحل الابتدائي في الحل الأمثل للنموذج الابتدائي.

الآن نحاول أن نحل الشكل الثنائي للنموذج الابتدائي السابق لنتأكد من أن عناصر الحل الأمثل للثنائي هي نفسها التي وجدناها في جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي، وبالتالي يمكن استخراجها مباشرة منه بدون اللجوء إلى حل النموذج الثنائي والعكس أيضا صحيح.

إذن الشكل الثنائي للنموذج الابتدائي السابق هو:

$\max \mathbf{Z' = 5Y_1 + 9Y_2}$

$2Y_1 + 3Y_2 \leq 6$

$Y_1 + 4Y_2 \leq 5$

$Y_i \geq 0$

الحل: بعد تحويله إلى شكله القياسي نحصل على جدول الحل الابتدائي المقبول التالي:

Z'	Y_1	↓ Y_2	S_1	S_2	SOL
Z'	-5	-9	0	0	0
S_1	2	3	1	0	6
← S_2	1	4	0	1	3

في إطار البحث عن الحل الأمثل ندخل إلى قاعدة الحل المتغير Y_2 ويخرج S_2 فنحصل على جدول المحاولة الأولى التالي:

Z'	↓ Y_1	Y_2	S_1	S_2	SOL
Z'	-11/4	0	0	9/4	45/4
← S_1	5/4	0	1	-3/4	9/4
Y_2	1/4	1	0	1/4	5/4

يدخل الآن Y_1 ويخرج S_1، ونحصل على جدول المحاولة الثانية التالي:

Z'	Y_1	Y_2	S_1	S_2	SOL
Z'	0	0	11/4	3/5	16,2
Y_1	1	0	4/5	-3/5	9/5
Y_2	0	1	-1/5	3/20	4/5

هذا الجدول إذن يمثل الحل الأمثل المتمثل في:

$$Z'_{min} = 16,2, \quad Y_1 = 9/5, \; Y_2 = 4/5$$

استنتاج:

– نلاحظ الآن أن قيم الحل الأمثل للنموذج الثنائي وهي Y_1, Y_2 هي نفس القيم التي أشرنا إليها سابقا، والمستخرجة مباشرة من جدول الحل الأمثل للنموذج الأصلي.

– نلاحظ أيضا تساوي $16,2 = \max Z = \min Z'$.

– وأخيرا نشير إلى أنه لو أردنا أن نستخرج قيم الحل الأمثل للنموذج الابتدائي من النموذج الثنائي ما علينا إلا أن نبحث عن قيم معاملات متغيرات الحل الابتدائي للنموذج الثنائي في جدول الحل الأمثل لنعرف هذه القيم. فقيم معاملات متغيرات الحل الابتدائي (S_2,S_1) في جدول الحل الأمثل السابق تساوي على التوالي (3/5,11/5)، وهي قيم (X_2,X_1) للنموذج الابتدائي كما رأينا سابقا.

تمارين

1 – أ– أكتب الشكل الثنائي للنموذج الخطي الابتدائي المعطى في الجدول التالي أسفله.

ب – حل النموذجين وقارن بين الحلين.

الحل: أ– تكوين النموذج المرافق.

النموذج الابتدائي المعطى	النموذج الثنائي الموافق له
$\min Z = 5X_1 + 2X_2$ $X_1 + 2X_2 \geq 5$ $2X_1 - X_2 \geq 12$ $X_1 + 3X_2 \geq 4$ (حر)X_1 ,$X_2 \geq 0$	$\max Z' = 5Y_1 + 12Y_2 + 4Y_3$ $Y_1 + 2Y_2 + Y_3 = 5$ $2Y_1 - Y_2 + 3Y_3 \leq 2$ $Y_i \geq 0$

ب– حل النموذجين.

عناصر حل النموذج المرافق				$Y_1=5,8$	$Y_2= - 0,4$	$Z' = \frac{141}{5}$
Z	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**R_2**	**Sol.**
Z	0	0	0,6	5,8	-0,4+m	$\frac{141}{5}+2m$
X_2	1	0	0,2	0,4	-0,2	$\frac{8}{5}$
X_1	0	1	1,4	0,2	0,4	$\frac{9}{5}$

2 - حل النموذج الخطي الابتدائي التالي واستنتج منه عناصر حل النموذج الثنائي مباشرة:

$$\max Z = 60X_1 + 60X_2 + 90X_3 + 90X_4$$

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 5$

$7X_1 + 5X_2 + 3X_3 + 2X_4 \leq 1$

$3X_1 + 5X_2 + 10X_3 + 15X_4 \leq 1$

$X_j \geq 0$

الحل: الجدول التالي يعطي الحل الأمثل للنموذج الابتدائي المعطى، ومنه نستخرج عناصر الحل الأمثل للنموذج الثنائي، الموضحة في المستطيل المخصص في الصف الثاني $Y_3 = \frac{450}{61}$ ، $Y_2 = \frac{330}{61}$ ، $Y_1 = 0$

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	0	$\frac{240}{61}$	0	$\frac{1920}{61}$	0	$\frac{330}{61}$	$\frac{450}{61}$	$\frac{780}{61}$
Z'					Y_1	Y_2	Y_3	Sol.

3- نفس السؤال السابق بالنسبة للنموذج التالي:

$\max Z = 5X_1 + 2X_2 + 10X_3 + X_4$

$2X_1 + X_2 + 4X_3 + 7X_4 \leq 1000$

$5X_2 + 2X_3 + 7X_4 \leq 200$

$4X_1 + 3X_2 + 6X_3 + 13X_4 \leq 2000$

$X_j \geq 0$

الجواب:

عناصر حل النموذج المرافق					Y_1	Y_2	Y_3	Sol.
Z	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**Sol.**
Z	0	0,5	0	16,5	2,5	0	0	2500
X_1	1	- 4,5	0	- 3,5	0,5	-1	0	300
X_3	0	2,5	1	3,5	0	0,5	0	100
S_3	0	6	0	6	- 2	4,5	1	200

4 - حل النموذج الخطي الثنائي التالي ثم استخرج منه عناصر حل النموذج الابتدائي:

$\max Z' = 30Y_1 + 8Y_2 + 10Y_3 + 5Y_4$

$5Y_1 + 10Y_2 + 2Y_4 \leq 200$

$5Y_1 + 11Y_2 + 2Y_3 + 5Y_4 \leq 310$

$2Y_1 + 6Y_2 + 3Y_3 + 2,8Y_4 \leq 250$

$Y_j \geq 0$

الجواب:

عناصر حل النموذج الإبتدائي					X_1	X_2	X_3	Z
Z'	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z'	0	57	0	22	1	5	0	1750
Y_1	1	2	0	0,4	1,5	0	0	40
Y_3	0	0,5	1	1,5	-0,5	0,5	0	55
S_3	0	0,5	0	- 2,5	-1,1	-1,5	1	5

5 - نفس السؤال:

$\max Z' = 2Y_1 + 10Y_2 + 9Y_3 + 6Y_4$

$4Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + Y_4 \leq 40$

$3Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3 + 2Y_4 \leq 70$

$10Y_1 + 6Y_2 + 10Y_3 + 5Y_4 \leq 200$

$Y_i \geq 0$

الجواب:

عناصر حل النموذج الإبتدائي					X_1	X_2	X_3	Z
Z'	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z'	17	0	2	0	4	1	0	230
Y_2	2,5	1	0,5	0	1	- 0,5	0	5
Y_4	1	0	1	1	- 1	1	0	30
S_3	0	0	2	0	-1	- 2	1	20

6 -حل النموذج الخطي الابتدائي التالي ثم حل الشكل المرافق له وقارن بين الحلين:

$\max Z = 5X_1 + 7X_2 + 9X_3$

$2X_1 + 4X_2 + 6X_3 \leq 24$

$5X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 24$

$X_j \geq 0$

الجواب:

عناصر حل النموذج المرافق				$Y_1 = \frac{25}{16}$	$Y_2 = \frac{3}{8}$	Z'= 46,5
Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	Sol.
Z	0	0	1,5	$\frac{25}{16}$	$\frac{3}{8}$	46,5
X_2	0	1	1,5	$\frac{3}{16}$	$\frac{-1}{8}$	4,5
X_1	1	0	0	$\frac{1}{8}$	0,25	3

7- حل النموذج الثنائي الموافق للنموذج الابتدائي التالي:

$\min Z = 2,5X_1 + 1,5X_2$

$2X1 + 3X_2 \geq 12$

$4X_1 + X_2 \geq 8$

$X_j \geq 0$

الجواب:

عناصر حل النموذج الإبتدائي			X_1	X_2	Z
Z'	Y_1	Y_2	S_1	S_2	Sol.
Z'	0	0	1,2	3,2	7,8
Y_2	0	1	0,3	- 0,2	0,45
Y_1	1	0	1	0 ,5	0 ,35

8- حل النموذج الخطي الثنائي التالي واستنتج منه عناصر حل النموذج الابتدائي الموافق له:

$\max Z = 10Y_1 + 12Y_2 + 6Y_3 + 10Y_4$

$Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 10Y_4 \leq 3$

$5Y_1 + 3Y_2 + Y_3 + Y_4 \leq 1$

$Y_i \geq 0$

الجواب:

عناصر حل النموذج الإبتدائي					X_1	X_2	Z
Z'	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	S_1	S_2	Sol.
Z'	17,84	4	0	0	0,5	5	6,5
Y_4	0,92	-0,5	0	1	1	0,5	0,125
Y_3	7,5	3,5	1	0	-0,125	1,25	0,875

9- حل النموذج الخطي الابتدائي التالي وحل شكله المرافق.

$\max Z = 2X_1 + 5X_2$

$4X_1 + 3X_2 \geq 12$

$-X_1 + 2X_2 \leq 6$

$2X_1 - X_2 \leq 4$

$X_j \geq 0$

الجواب: أ–شكل النموذج المرافق.

النموذج الابتدائي المعطى	النموذج الثنائي الموافق له
$\max Z = 2X_1 + 5X_2$	$\min Z' = -12Y_1 + 6Y_2 + 4Y_3$
$4X_1 + 3X_2 \geq 12$	$-4Y_1 - Y_2 + 2Y_3 \geq 2$
$-X_1 + 2X_2 \leq 6$	$-3Y_1 + 2Y_2 - Y_3 \geq 5$
$2X_1 - X_2 \leq 4$	$Y_j \geq 0$
$X_j \geq 0$	

ب – حل النموذجين.

عناصر حل النموذج الإبتدائي						$X_1=\frac{14}{3}$	$X_2=\frac{16}{3}$	$Z = 36$
Z'	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol.
Z'	-5,67	0	0	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{16}{3}$	$\frac{14}{3} - m$	$\frac{16}{3} - m$	$36 - 7m$
Y_3	-3,67	0	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	3
Y_2	-3,34	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	4

10- ليكن النموذج الابتدائي التالي، أجب على نفس السؤال كما في التمرين رقم 9.

$\text{Min } Z = 2X_1 + X_2$

$3X_1 + X_2 = 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + 2X_2 \leq 3$

$X_j \geq 0$

الجواب : **أ–** شكل النموذج المرافق

النموذج الابتدائي المعطى	النموذج الثنائي الموافق له
$\text{Min } Z = 2X_1 + X_2$	$\text{Max } Z' = 3Y_1 + 6Y_2 - 3Y_3$
$3X_1 + X_2 = 3$	$3Y_1 + 4Y_2 - Y_3 \leq 2$
$4X_1 + 3X_2 \geq 6$	$Y_1 + 3Y_2 - 2Y_3 \leq 1$
$X_1 + 2X_2 \leq 3$	$Y_3 \geq 0$, $Y_3 \geq 0$, Y_1(حر)
$X_j \geq 0$	

ب – حل النموذجين.

عناصر حل النموذج المرافق				$Y_1=0,4$	$Y_2=0,2$	$Y_3=0$	$Z'=$ 2,4
Z	**X_1**	**X_2**	**S_2**	**R_1**	**R_2**	**S_3**	**Sol.**
Z	0	0	– 0,2	0,4 – m	0,2 – m	0	2,4 - 9m
X_1	1	0	0,2	0,6	– 0,2	0	0,6
X_2	0	1	- 0,6	– 0,8	0,6	0	1,2
S_3	0	0	1	1	- 1	1	0

استخدام النموذج الثنائي في التحليل الاقتصادي

هناك عدة مجالات أو ميادين تستعمل فيها النموذج الثنائي في التحليل الاقتصادي، وسنحاول أن نقتصر فيما يلي على أكثرها مصداقية.

1 – المتغيرات الثنائية (Y_i) تعبر عن ربح أو تكلفة الفرص البديلة لاستعمال الموارد في النشاط الاقتصادي: تستعمل الموارد الاقتصادية المختلفة في مختلف أوجه النشاط الاقتصادي وفي مختلف القطاعات، والحكم على الاستعمال الاقتصادي لهذه الموارد، بمعنى الجدوى الاقتصادية لاستعمال هذه الموارد، هو مقدار العائد الذي يتحصل عليه الأعوان الاقتصاديون عند استعمالهم لهذه الموارد. فالحصول على العائد هو الهدف الأساسي الذي من أجله يقبل المستثمر التضحية بالموارد في الوقت الحاضر من أجل الحصول على العائد في المستقبل. ومن أجل أن يكون حكمنا على جدوى استثمار الموارد المالية واقعيا لا يكفي النظر إلى العائد المباشر الممكن الحصول عليه نتيجة الاستثمار في قطاع معين، بل يجب خاصة الحكم على العائد النسبي لاستعمال هذه الموارد، والمقصود بذلك هو تحليل وتقييم العوائد المختلفة الممكن الحصول عليها من توظيف أو استثمار تلك الموارد في قطاعات النشاط الاقتصادي المختلفة ومقارنتها بالعائد الممكن الحصول عليه في قطاع النشاط الاقتصادي الحالي، بمعنى آخر تقييم الفرص البديلة لاستعمال الموارد الاقتصادية المتاحة والعمل دائما على توظيفها أو استثمارها في قطاعات النشاط ذات العائد النسبي الأكبر.

كيف يمكن إذن تقييم الفرص البديلة لاستعمال الموارد المتاحة؟ عادة ما يسمح النموذج الثنائي بالمساعدة في إجراء هذا التقييم.

لأغراض التبسيط وتسهيل الفهم، سنحاول أن نوضح معنى هذه الفكرة من خلال المثال التالي:

نفترض أن مؤسسة ما تنتج عدد (n) من المنتجات المختلفة، وذلك باستعمال عدد (m) من الموارد المختلفة المتاحة للمؤسسة بكميات محدودة مقدارها $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m)$، معلوم لدينا أيضا جدول المعاملات الفنية (a_{ij}) التي يوضح عدد الوحدات من المورد (i) الضرورية لإنتاج وحدة واحدة من المنتج (j)، حيث $i = 1, \ldots, m$، $j = 1, \ldots, n$. تبيع المؤسسة المذكورة منتجاتها وتحصل على ربح من بيع كل وحدة واحدة من المنتج (**j**) مقداره (C_j) وحدة نقدية.

تريد المؤسسة تحديد عدد الوحدات اللازم إنتاجها من كل نوع من المنتجات المختلفة الذي يسمح لها تحقيق أكبر ربح ممكن في ظل القيود المفروضة على الموارد المتاحة لديها.

كما رأينا في الفقرات السابقة، معطيات هذه المسألة ممكن أن نضعها في شكل نموذج خطي كالتالي:

$$\max \mathbf{Z} = \sum C_j X_j \qquad \textbf{(دالة الهدف)}$$

(القيود الفنية)

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n \leq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \leq b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + \ldots + a_{3n}X_n \leq b_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \leq b_3$$

$X_j \geq 0$, $b_i \geq 0$

$i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n$

الآن نفترض أنه عوض استعمال هذه الموارد في إنتاج المنتجات المذكورة، فإن المؤسسة المعنية طرح أمامها خيار أو إمكانية أخرى لاستعمال هذه الموارد المتاحة في نشاط اقتصادي آخر، في هذه الحالة – في هذه العملية البديلة – يلزم تحديد الثمن وبالتالي العائد الذي من أجله توافق المؤسسة على ترك قطاعها الحالي والتوجه بمواردها نحو القطاع البديل.

إن العائد البديل لاستعمال المورد الأول في قطاع آخر هو (Y_1)، وعائد استعمال المورد الثاني هو (Y_2)، وهكذا العائد البديل لاستعمال المورد رقم (m) هو (Y_m).

فلو أردنا أن نجري تقييما بديلا لكميات الموارد المستعملة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول، فإننا نضرب هذه الكميات في عوائدها البديلة، أي $(a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 + \dots + a_{m1}Y_m)$ ثم نقارن مجموع العائد البديل لاستعمال هذه الكميات من الموارد مع العائد الحالي لاستعمالها في إنتاج المنتج الأول وهو الربح المحصل عليه من بيع هذا المنتج (C_1).

أي يجب المقارنة بين المقدار المشار إليه أعلاه والربح الأحادي للمنتج الأول وهو (C_1) بمعنى آخر يجب أن نشكل القيد الفني الأول للنموذج الثنائي، فهذا القيد الفني يسمح بإجراء هذه المقارنة والحكم على أي العائدين أكبر: العائد الحالي (C_1) للمنتج الأول أو العائد البديل لاستعمال الموارد المذكورة:

$$(a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + a_{31}Y_3 + \dots + a_{m1}Y_m) \overset{?}{\geq} C_1$$.

عندما نكون القيود الفنية الأخرى للنموذج الثنائي نستطيع بنفس المنهج تقييم الفرص البديلة لاستعمال كميات الموارد اللازمة لإنتاج المنتجات الأخرى ومقارنتها بعوائدها البديلة:

$$a_{12}Y + a_{22}Y + a_{32}Y + \dots + a_{m2}Y \geq C_2$$

....

$$a_{1n}Y + a_{2n}Y + a_{3n}Y + \dots + a_{mn}Y \geq C_n$$

2 – المتغيرات الثنائية (Y_i) تعكس درجة تأثير الموارد المستعملة في النشاط على دالة الهدف.

إن المتغيرات الثنائية تعكس أو تحدد درجة تأثير كميات الموارد المستعملة في النشاط على مستوى القيمة المثلى الذي يمكن أن تصل إليه دالة الهدف للنموذج الأصلي، بمعنى آخر فإن قيم (Y_i) للنموذج الثنائي تمكننا من معرفة الأهمية النسبية أو التأثير النسبي للموارد المختلفة (b_1 , b_2 , b_3, ... , b_m) على تحقيق القيمة المثلى لدالة الهدف.

فمثلا إذا اعتبرنا النموذج الخطي التالي، وهو نموذج خاص بنشاط مؤسسة اقتصادية تنتج منتجين (A_1 ،A_2) بكميات (X_1 , X_2) وتستعمل في إنتاجهما موردين إنتاجيين بكميات (b_2 , b_1):

$$\max Z = C_1 X_1 + C_2 X_2$$
$$a_{11}X_1 + a_{12} X_2 \leq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2$$
$$X_j \geq 0$$

والنموذج الثنائي الموافق له هو:

$$\min Z' = b_1 Y_1 + b_2 Y_2$$

$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 \geq C_1$

$a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 \geq C_2$

$Y_i \geq 0$

نفترض أنه بهدف توسيع الإنتاج أردنا زيادة كمية المورد الأول بكمية مقدارها (Δb_1) وحدة، فإن النموذج الابتدائي يصبح كالتالي:

$\max \mathbf{Z} = \mathbf{C_1 X_1 + C_2 X_2}$

$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1 + \Delta b_1$

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \leq b_2$

$X_j \geq 0$

والنموذج الثنائي الموافق له يصبح:

$\min Z' = (b_1 + \Delta b_1)Y_1 + b_2Y_2$

$a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 \geq C_1$

$a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 \geq C_2$

$Y_i \geq 0$

ومن هنا تصبح دالة الهدف للثنائي كالتالي:

$\min Z' = b_1Y_1 + (\Delta b_1)Y_1 + b_2Y_2$

$= b_1Y_1 + b_2Y_2 + (\Delta b_1)Y_1$

$\text{Min } Z' = \min Z' + \min \Delta Z'$

وهذا يعني أن: ($\Delta Z' = \Delta b_1 . Y_1$)

أي أن: $Y_1 = \frac{\Delta Z'}{\Delta b1}$

إن قيمة المتغير الثنائي (Y_1) في هذه الحالة تعني مقدار التغير في القيمة المثلى لدالة الهدف الناتج عن تغير كمية المورد الأول بكمية مقدارها (Δb_1). ويمكن تغيير كميات كل الموارد المستعملة وتقييم هذا التغيير على القيمة المثلى لدالة الهدف.

مثال: نفترض أن النموذج التالي يعكس حالة نشاط إنتاجي لمؤسسة معينة، تنتج ثلاث منتجات وتستعمل في إنتاجهم موردين إنتاجيين بكميات (**20**= b_1 وحدة)، (**10**= b_2 وحدة) كالتالي:

$$\max Z = 3X_1 + 6X_2 + 2X_3$$
$$3X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 20$$
$$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 10$$
$$X_j \geq 0$$

إذا اعتبرنا أن دالة الهدف ترمز إلى الربح المحقق من بيع المنتجات الثلاث المذكورة، فإنه بإمكاننا أن نعرف مباشرة مقدار تأثير زيادة كميات الموارد المستعملة على القيمة المثلى لدالة الهدف بدون إعادة حل النموذج الخطي.

الجدول التالي يمثل الحل الأمثل للنموذج السابق الخاص بنشاط المؤسسة، والذي يوضح أن هذه المؤسسة تستطيع أن تعظم أرباحها بمقدار (**24** وحدة نقدية) وذلك في حدود كميات الموردين اللذان تستعملهما في نشاطها، أما كميات الإنتاج التي تسمح لها بالوصول إلى هذا المستوى من النشاط الأمثل فهي: $\mathbf{X_1 = 4, X_2 = 2}$ وحدات.

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	Sol.
Z	0	0	1	0,6	1,2	24
X_1	1	0	-1	0,6	−0,8	4
X_2	0	1	1	−0,2	0,6	2

من هذا الجدول نستنتج أيضا أن قيم عناصر الحل الأمثل للنموذج الثنائي هي: $\mathbf{Y_1 = 0{,}6,\ Y_2 = 1{,}2}$.

إذا افترضنا أننا نريد زيادة خمس (5) وحدات من المورد الأول من أجل زيادة حجم النشاط في المؤسسة المعنية وأردنا معرفة تأثير ذلك على القيمة المثلى لدالة هدف (دالة الأرباح) هذه المؤسسة، فيكفي حساب الزيادة في دالة الهدف $Z'(\Delta)$ الناتجة عن الزيادة في المورد الأول (b_1) وهي (Δb_1).

إذن: $\Delta Z' = \Delta b_1 \times Y_1 = 5 \times 0,6 = 3$. وتصبح قيمة دالة الهدف هي: $24 + 3 = Z' = 27$ و.ن.

لو أردنا أن نتأكد من ذلك بإعادة حل النموذج السابق بواسطة طريقة السمبلكس وذلك بزيادة الطرف الأيمن للقيد الفني الأول بخمس وحدات (عوض 20 وحدة السابقة)، فيكون جدول الحل الأمثل في هذه الحالة:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	Sol.
Z	0	0	1	0,6	1,2	27
X_1	1	0	-1	0,6	– 0,8	7
X_2	0	1	1	– 0,2	0,6	1

وهي نفس قيمة الحل الأمثل المحصل عليه أعلاه.

هل هذه العلاقة المباشرة بين درجة تغير كمية الموارد ودالة الهدف هي دائما صحيحة أم هل هي محدودة المجال، بمعنى هل أننا نستطيع أن نقيم ونعرف مباشرة مقدار تأثير زيادة أو خفض كمية الموارد على قيمة دالة الهدف دائما أم هل هناك حدود لهذه القدرة.

في الحقيقة هناك مجال لتغير كمية الموارد تبقى فيه هذه العلاقة صحيحة، أما خارج هذا المجال فإن هذه العلاقة تصبح غير صحيحة. ما هو هذا المجال؟ هذا المجال يتمثل في الحدود التي تبقى فيها أسعار الظل المثلى (Y_i) لهذه الموارد **مستقرة**، أو بعبارة أخرى هو ذلك المجال الذي يبقى فيه الحل الأمثل للنموذج الثنائي **مستقرا**.

أما خارج هذا المجال فإن القيم المثلى لأسعار الظل (Y_i) تتغير وبالتالي فإن طبيعة الموارد بالنسبة لنشاط المؤسسة تتغير أيضا.

كيف يتحدد هذا المجال؟

– نضرب عناصر قيم العمود الأيمن في جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي في (1-).

– ثم نقسم هذه القيم على قيم عمود المورد الذي نريد تقييم مجال تغيره.

– من القيم الناتجة نأخذ أصغر قيمة موجبة وأكبر قيمة سالبة، الأولى تمثل الحد الأعلى لتغير الموارد والثانية تمثل الحد الأدنى لتغيرها.

– إذا ما تغير المورد المعني في حدود هذا المجال فإن القيم المثلى لأسعار الظل (Y_i) تبقى مستقرة، بمعنى عناصر الحل الأمثل للنموذج الثنائي تبقى ثابتة.

– إذا لم تكن من بين القيم المحصل عليها بعد التقسيم قيما موجبة فهذا يعني أن المورد يمكن زيادته إلى ما لا نهاية، وإذا لم توجد قيما سالبة فالمورد يمكن تخفيضه إلى الصفر بدون أن يؤثر ذلك على المجال المذكور.

نرجع إلى جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي السابق:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	Sol.
Z	0	0	1	0,6	1,2	24
X_1	1	0	-1	0,6	– 0,8	4
X_2	0	1	1	– 0,2	0,6	2

– تحديد مجال تغير المورد الأول (b_1) الذي لا يؤثر على استقرار قيم أسعار الظل (Y_i) الحالية:

10 = (0,2-) ÷ 2- / 67 ,6 - = 0,6 ÷ 4 -

نختار من بين هذه القيم أصغر قيمة موجبة وأكبر قيم سالبة، ويكون مجال تغير المورد (b_1)، الذي لا يؤثر على الحل الأمثل الثنائي الحالي هو:

$$-6,67 \leq \Delta b_1 \leq 10$$

وبالتالي فإن: $20 - 6,67 \leq b_1 \leq 10 + 20$

$$13,34 \leq b_1 \leq 30$$

– تحديد مجال تغير المورد الثاني (b_2):

$$3,34 - = (0,6) \div 2- \ / \ 5 = (8,0 -) \div 4 -$$

إذن: $-3,34 \leq \Delta b_2 \leq 5$

وبالتالي فإن: $10-3,34 \leq b_2 \leq 10 + 5$

$$6,67 \leq b_2 \leq 15$$

مثال:

في حال زيادة المورد الثاني مثلا بمقدار 5 وحدات ما هو تأثير ذلك على الوضعية المثلى لنشاط المؤسسة المعنية:

ما دام أن مقدار الزيادة في المورد الثاني تقع داخل مجال التغير الذي لا يؤثر على الحل الأمثل الثنائي، فإننا نستطيع أن نعرف مباشرة مقدار تأثير هذه الزيادة على دالة الهدف كالتالي:

$$\Delta Z = \Delta b_2 \, . \, Y_2 = 5 \, . \, 1,2 = 6$$

ويمكن أيضا أن نعرف مقدار تأثير زيادة المورد الثاني على دالة الهدف وعلى برنامج الإنتاج كالتالي:

الحل الأمثل الجديد	التغيير	الحل الأمثل السابق	المورد الثاني الممثل بالمتغير S_2	Z
30	1,2 .(5) = 6	24	1, 2	Z
0	-0,8(5) = - 4	4	– 0,8	X_1
5	0,6(5) = 3	2	0,6	X_2

3- تقييم ندرة الموارد المستعملة في النشاط الاقتصادي:

نأخذ المثال التالي الذي نوضح من خلاله خصائص الموارد المستعملة في النشاط الاقتصادي.

نفترض أن مؤسسة صناعية تنتج ثلاث منتجات (A_3, A_2, A_1) بكميات (X_3, X_2, X_1) وتستعمل في إنتاجهما ثلاث موارد (b_3, b_2, b_1) بكميات مقدارها (800، 500، 300 وحدة على التوالي)، ثم تبيع المؤسسة المذكورة هذه المنتجات وتحصل على ربح مقداره $(C_1 = 9)$، $(C_2 = 6)$ و $(C_3 = 2)$ وحدة نقدية على التوالي. تريد المؤسسة معرفة وضع النشاط الأمثل الذي يسمح لها بتعظيم أرباحها في حدود ما هو متاح لها من موارد. يمكن التعبير عن نشاط هذه المؤسسة من خلال النموذج الخطي التالي:

$$\max Z = 9X_1 + 6X_2 + 2X_3$$
$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 800$$
$$5X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 500$$
$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 300$$
$$X_j \geq 0$$

الجدول التالي يعطي الحل الأمثل لهذا النموذج، الذي يوضح وضع النشاط الأمثل للمؤسسة المذكورة.

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	0	0	9,25	0	1,5	0,75	975
S_1	0	0	0,25	1	−0,5	- 0,25	475
X_1	1	0	0,8	0	0,5	- 0,75	25
X_2	0	1	0,75	0	− 0,5	1,25	125

عند تحليل محتويات هذا الجدول نستطيع استنتاج العناصر التالية:

1- برنامج الإنتاج الأمثل الذي يسمح للمؤسسة من تعظيم أرباحها هو:

إنتاج كمية من المنتج الأول مقدارها: $X_1 = 25$ وحدة.

إنتاج كمية من المنتج الثاني مقدارها: $X_2 = 125$ وحدة.

إنتاج كمية من المنتج الثالث مقدارها: $X_3 = 0$ وحدة.

2 – من أجل تحقيق هذا البرنامج الإنتاجي تم تخصيص الموارد المتاحة كالتالي:

– استهلك من المورد الأول كمية مقدارها: **325 = 0 +25 . 3+125 . 2**، وتبقى من هذا المورد كمية تساوي **475** وحدة بدون استعمال.

– استهلك من المورد الثاني بكمية مقدارها: **500 = 0 +25. 5+125. 3**، وهذا يعني أن الكمية المتاحة من المورد الثاني استعملت بالكامل من أجل تحقيق برنامج الإنتاج الأمثل.

– أما المورد الثالث فاستعملت منه الكمية: **300 = 0 +25. 2 +125. 2**، وهذا يدل على أن الكميات التي كانت متوفرة من هذا المورد استغلت استغلالا كاملا من أجل تنفيذ برنامج الإنتاج الأمثل.

3 – الموارد التي استعملت بالكامل، والممثلة بمتغيرات الفرق (S_1)، (S_2)، لم تظهر في قاعدة الحل في جدول الحل الأمثل. هذا يعني أن قيمها تساوي صفر ($S_1 = 0, S_2 = 0$).

في حين أن الموارد التي لم تستغل بالكامل، والممثلة في حالتنا هذه بمتغير الفرق (S_3)، فإنها تظهر في قاعدة الحل في جدول الحل الأمثل. والقيمة التي تظهر بها هي

بالضبط الكمية غير المستعملة منها في وضع النشاط الأمثل (أنظر القيمة المقابلة ل S_3 في الطرف الأيمن من جدول الحل الأمثل).

4 - قيمة عناصر الحل الأمثل للنموذج الثنائي نستطيع استخراجها مباشرة من جدول الحل الأمثل للنموذج الابتدائي، وهي تساوي:

$Y_1 = 0$, $Y_2 = 1,5$, $Y_3 = 0,75$.

هذه القيم تعني من بين ما تعني مقدار الزيادة أو النقص في دالة الهدف الناتجة عن زيادة أو انخفاض أي مورد من الموارد الثلاثة بوحدة واحدة. فمثلا ($Y_2 = 1,5$) تعني أن قيمة دالة الهدف ستزيد بمقدار (1,5) إذا ما زدنا من استعمال المورد الثاني بوحدة واحدة والعكس، بينما ($Y_1 = 0$) تعني أن مقدار تأثير المورد الأول على دالة الهدف هو صفر، وهذا راجع إلى أن هذا المورد هو موجود لدى المؤسسة بكميات فائضة وبالتالي فإن زيادة كميات المستعمل منه لا تؤثر على دالة هدف هذه المؤسسة. بالإضافة إلى ذلك نستطيع أن نرتب الموارد الثلاثة حسب **درجة أهميتها** بالنسبة للمؤسسة، بمعنى حسب درجة تأثيرها على دالة هدفها. فيأتي المورد الثاني في المرتبة الأولى يليه المورد الثالث ثم المورد الأول الذي ليس له أي أهمية بالنسبة للمؤسسة في الحالة المدروسة.

5 - يتبين من جدول الحل الأمثل أن المؤسسة قررت عدم إنتاج المنتج الثالث (A_3) أي أن: $X_3 = 0$.

وتفسير ذلك أن الفرص البديلة لاستعمال كميات الموارد اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من المنتج الثالث هي ذات عائد أكبر من العائد الناتج عن استعمال تلك الموارد في إنتاج المنتج الثالث. وقد قامت المؤسسة بتقييم العائد الناتج عن استعمال

موارد المنتج الثالث استعمالا آخر ومقارنته بالعائد الناتج عن استعمالها في إنتاج المنتج الثالث والذي يساوي ($C_3 = 2$)، فوجدت أن عائد الاستعمال البديل هو الأكبر. إذا لم يكن هذا التحليل صحيحا، فلا ندري والحالة هذه ما هو مبرر عدم إقبال المؤسسة على إنتاج هذا المنتج.

سنقوم الآن بالتحقق من هذا الاستنتاج، وذلك بتقييم فرص الاستعمال البديل لكميات الموارد اللازمة لإنتاج وحدة واحدة من المنتج الثالث وهي على التوالي (3, 6, 4 وحدات)، هذا التقييم يتم عن طريق العائد البديل لكل مورد من الموارد الثلاثة.

فالعائد البديل للمورد الأول هو ($Y_1 = 0$)، وللمورد الثاني هـو ($Y_2 = 1,5$) وللثالث هو ($Y_3 = 0,75$)، فإذا ما قمنا بتقييم كميات الموارد المشار إليها بعوائدها البديلة وقارنا مجموع هذه العوائد بالعائد الحالي الناتج عن استعمال الموارد المذكورة في إنتاج المنتج الثالث والذي يساوي ($C_3 = 2$)، فيمكن التحقق من نتيجة الاستنتاج السابق.

$$\mathbf{4\,Y_1 + 6\,Y_2 + 3\,Y_3 \longleftrightarrow C_3}$$

$$\mathbf{4\,(0) + 6\,(1,5) + 3\,(0,75) \longleftrightarrow 2}$$

$$11,25 \geq 2$$

وواضح أن العائد البديل لاستعمال موارد المنتج الثالث (**11,25**) هو أكبر بكثير من عائد المنتج الثالث نفسه وهو (2)، وأن مقدار الفرق بينهما هو (9,25) وهو يمثل الخسارة النسبية التي كانت ستتحملها المؤسسة لو أنها قررت إنتاج المنتج الثالث وذلك لأن المنتج الثالث هو أقل فائدة للمؤسسة بالنظر إلى إمكانيات الاستعمالات البديلة لموارده.

إن قيمة هذا الفرق بين العائدين للمنتج الثالث، وهي ($\frac{37}{4}$ =9,25)، نستطيع ملاحظتها مباشرة في جدول الحل الأمثل كمعامل للمنتج (X_3) في جدول الحل الأمثل.

ومادام هذا الفارق (9,25) بين العائدين موجودا فإن المؤسسة المعنية لا يمكنها أن تدخل المنتج الثالث في برنامج إنتاجها، وعندما يصبح الفارق بين عائد المنتج الثالث والعائد البديل لاستعمال موارده يساوي الصفر، يصبح عندها بالإمكان إدخال هذا المنتج في تشكيلة منتجات هذه المؤسسة مثله مثل المنتجين الأول والثاني اللذين نلاحظ أن قيمة الفرق بين العائدين الخاصين بهما يساوي الصفر (وهذا يعبر عنه معامـلات X_1 , X_2 في جدول الحل الأمثل السابق).

6 - نقول عادة عن الموارد التي تستعمل بالكامل في وضع النشاط الأمثل للمؤسسة، وهي في مثالنا السابق ممثلة بالمتغيرات (S_2) و (S_3)، نقول عنها **موارد نادرة.** هذا النوع من الموارد دائما يكون عائده البديل أو (سعر ظله) (Y_i) يكون دائما أكبر من الصفر ($Y_i \geq 0$).

وبالعكس الموارد التي لا تستغل استغلالا كاملا في وضع النشاط الأمثل للمؤسسة، والممثلة في المثال السابق بالمتغير (S_1)، نقول عنها أنها موارد **غير نادرة** و يكون دائما عائدها البديل أو (سعر ظلها) (Y_i) يكون دائما يساوي الصفر ($Y_i = 0$).

فالموارد التي يكون سعر ظلها (عائدها البديل Y_i) يساوي صفر لا تستعمل استعمالا كاملا في وضع النشاط الأمثل للمؤسسة ولا تؤثر على دالة هدف هذه المؤسسة، أهميتها بالنسبة للمؤسسة غير أساسية وهي من هذا المنطلق تعتبر موارد غير نادرة.

لذلك فإن المتغير (S_i) المعبر عن هذه الموارد يظهر في جدول الحل الأمثل والقيمة التي تقابله هي بالضبط الكمية العاطلة أو غير المستعملة منه. يمكن أن نعتمد التحليل العكسي لهذا التحليل بالنسبة للموارد التي يكون عائدها البديل Y_i أكبر من الصفر.

يمكن تلخيص هذا التحليل كالتالي:

$$S_i = 0 \iff Y_i \geq 0$$

$$S_i \geq 0 \iff Y_i = 0$$

الفصل الثاني

البرمجة البارامترية

تكمن أهمية دراسة البرمجة البارامترية في أنها تمكننا من تحديد آثار تغير معاملات دالة الهدف C_j (هوامش الربح الأحادية، التكاليف الأحادية، ثمن البيع، وغيرها)، أو كمية الموارد المستعملة (b_i) أو تكاليف الموارد المستعملة وغيرها، تحديد آثار تغيرها على الوضعية المثلى لنشاط المؤسسة.

لقد افترضنا سابقا في البرمجة الخطية، عند تكوين النموذج الخطي الخاص بأي نشاط، افترضنا ثبات معاملات دالة الهدف C_j (هوامش الربح أو غيرها من المؤشرات المحددة لدالة الهدف) وكذلك حجم الموارد المتاحة (b_i)، لكن في الواقع هناك عدة عوامل تؤدي إلى تغيير أسعار المنتجات والمواد في السوق، وتؤدي بالتالي إلى تغير هوامش الربح والتكاليف وغيرها من مؤشرات النشاط.

دراسة البرمجة البارامترية تمكن من تحديد مجال تغير هذه العوامل وتأثيرها على الوضع الأمثل للنشاط في المؤسسة الاقتصادية.

المبحث الأول

حساسية دالة الهدف للتغيرات في معاملاتها

لقد افترضنا سابقا أن هوامش الربح (معاملات دالة الهدف) تبقى ثابتة، وهذا يؤدي إلى أن برنامج الحل الأمثل يبقى أيضا ثابتا وصحيحا، بمعنى أن برنامج الإنتاج (X_J) والربح الأقصى (max Z) يبقيان صحيحان أيضا.

لكن في الواقع فإن هوامش الربح لا تبقى ثابتة، فهناك عوامل سوقية تؤدي إلى تغييرها. وهذا ما يؤدي إلى تغيير الحل الأمثل (تغيير برنامج الإنتاج الأمثل)، فهناك مجال معين تتغير فيه هوامش الربح (معاملات دالة الهدف) يبقى خلاله الحل الأمثل صحيحا. أما خارج هذا المجال فإن برنامج الإنتاج الأمثل السابق لا يصبح أمثلا ويجب التنقل إلى وضعية مثلى أخرى وحساب برنامج أمثل آخر.

لذلك يهمنا كثيرا أن نحدد المجال (الحدود) التي يمكن أن يتغير فيها الربح الأحادي، ثمن البيع، التكلفة الأحادية أو غيرها من المؤشرات في السوق، والتي يعبر عنها (C_J)، بدون أن يؤثر ذلك على برنامج النشاط الأمثل الحالي (X_J).

بمعنى آخر ما هي حدود تلك التغيرات في (C_J) في السوق التي تؤدي إلى التغير في قيمة دالة الهدف (Z) لكن في حدود برنامج النشاط الأمثل الحالي (يعني بدون أن نلجأ إلى تغيير برنامج الإنتاج الأمثل الحالي).

أما التغير خارج ذلك المجال، فإنها تخرجنا خارج وضعية النشاط الأمثل الحالي، ويتحتم علينا تغيير برنامج الإنتاج الأمثل من أجل الوصول إلى تعظيم دالة الهدف لأن القيمة الحالية لها لا تشكل القيمة المثلى في ظل ظروف السوق الجديدة. ويتم معرفة ذلك بإعادة حل النموذج الخطي باستعمال المعطيات الجديدة.

1 – تحديد مجال التغير في (C_j) الذي لا يؤثر على قيمة الحل الأمثل (X_j):

أ – بالنسبة للمتغير الذي لا يشكل جزءا من قاعدة الحل الأمثل:

سوف نتعرض هنا لمجال تغير هامش الربح للمنتج الذي لا يظهر في برنامج الإنتاج الأمثل، وهو في المثال الذي تعرضنا له أعلاه (C_3) هامش الربح لمنتج الثالث (X_3). من أجل تحديد مجال زيادة (C_3) الذي لا يؤثر على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي، فإننا نقارن بين الربح الأحادي الحالي لهذا المنتج وهو $C_3= 2$ ون وربح الفرص البديلة لاستعمال كميات موارد هذا المنتج والذي كان يساوي (11,25). ولقد تحصلنا أعلاه على نتيجة هذه المقارنة وكانت قيمة العائد البديل لاستعمال كميات موارد هذا المنتج أكبر من العائد المالي لهذا المنتج بمقدار 9,25ون.

هذا هو الحد الأقصى لتغير الربح الأحادي (C_3) للمنتج الثالث (X_3)، بدون أن يتأثر برنامج الإنتاج الأمثل الحالي. بعبارة أخرى يمكن زيادة هامش الربح (C_3) للمنتج (X_3) بقيمة قصوى قدرها (9,25) دون أن يتأثر برنامج الإنتاج الأمثل الحالي. لذلك فإن أقصى ما يمكن أن يصل إليه (C_3) بدون أن نؤثر على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي هو 11,25 (2+9,25)، ومعنى ذلك أنه ما دام الربح الأحادي للمنتج الثالث أقل أو يساوي (11,25)، فإن برنامج الإنتاج الأمثل الحالي سيظل كما هو. أما إذا زاد (C_3) على هذا الحد (11,25) فإن المنتح الثالث سوف يدخل إلى برنامج الإنتاج، وبالتالي فإن برنامج الحل الأمثل الحالي سوف يتغير.

نشير هنا أن مقدار تغير هامش الربح الثالث (C_3) الذي لا يؤثر على برنامج الحل الأمثل الحالي وهو (9,25) يمكن استخراجها مباشرة من جدول الحر

الأمثل للنموذج الأصلي، وذلك بالنظر في صف معاملات دالة الهدف وبالضبط في الخانة المقابلة للمنتج الثالث.

أما الحد الأدنى لتخفيض (C3)، فيكون عادة صفر (0)، بمعنى يمكن تخفيض هامش الربح للمتغير الذي لا يدخل في قاعدة الحل الأمثل إلى الصفر دون أن يؤثر ذلك على برنامج الحل الأمثل الحالي. ويمكن كتابة الحدين الأعلى والأدنى لتغير هامش الربح (C3) للمنتج الثالث كالتالي: $0 \leq C3 \leq 11,25$. باختصار يمكن القول أنه مادام هامش الربح للمنتج الثالث محصور بين (11,25) و(0) وحدات نقدية فإن برنامج الإنتاج الأمثل الحالي يبقى كما هو (وهو البرنامج الذي لا يحتوي على المنتج الثالث).

ب- بالنسبة للمتغير الذي يشكل جزءا من قاعدة الحل الأمثل:

من أجل أن نحدد مقدار الزيادة أو النقص التي يمكن أن تحدث في مقدار هامش الربح (C_i) الأحادي لأي من المنتجات التي تدخل في برنامج الإنتاج الأمثل (وهي في مثالنا المنتجين الأول والثالث)، والتي لا تؤدي إلى تغير في برنامج الحل الأمثل، فإننا نقوم بما يلي:

- نضرب معاملات دالة الهدف في جدول الحل الأمثل في (-1).

- نقوم بقسمة معاملات دالة الهدف غير الصفرية، الموجودة في جدول الحل الأمثل بعد ضربها في(-1)، نقسمها على صف معاملات المتغير الأصلي الموجود في قاعدة الحل، الذي يرغب في معرفة التغيرات في هامش الربح الخاص به (معاملاته في القيود الفنية).

- من بين القيم المحصل عليها نأخذ أصغر ناتج قسمة موجب، وأكبر ناتج قسمة سالب: الأول يمثل أقصى زيادة يمكن إضافتها إلى هامش الربح للمنتج المعني، والثاني يمثل أقصى تخفيض يمكن إنقاصه من هامش الربح للمنتج المعني.

– إذا لم توجد قيم موجبة، فإن أقصى مبلغ يمكن زيادته هو (∞)، وكذلك إذا لم توجد قيم سالبة، فإن أكبر مبلغ يمكن تخفيضه هو (0). يجب الإشارة إلى أنه يجب تجاهل القيم الصفرية.

بالرجوع إلى مثالنا السابق نحاول أن نستخرج مجال تغير هامشي الربح للمنتجين الأول والثاني الذين يظهران في برنامج الحل الأمثل كالتالي:

– مجال تغير C_1 الذي لا يؤثر على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي:

بعد ضرب معاملات دالة الهدف في (-1) وقسمتها على صف المعاملات غير الصفرية للمتغير (X_1) في القيود الفنية نحصل على القيم التالية:

$\frac{-37}{4} \div \frac{4}{5}$، $\frac{-3}{4} \div \frac{-3}{4}$، $\frac{-3}{2} \div \frac{1}{2}$، ومنها نحصل على القيم المختصرة التالية:

-11,561, -3 ,1 وحسب القواعد المشار إليها أعلاه نأخذ أصغر قيمة موجبة وهي (1) وأكبر قيمة سالبة وهي (- 3). وبالتالي يكون مجال تغير هامش الربح للمنتج الأول الذي لا يؤثر على برنامج الإنتاج الأمثل هو $-3 \leq \Delta C_1 \leq 1$ أي أن الحدان الأعلى والأدنى لهذا التغير هما:

$(C_1 + 1) \leq (C_1 - 3)$، ومنه: $(9 + 1) \leq C_1 \leq (9 - 3)$، أي أن:

$(10) \geq C_1 \geq (6)$. ، $C_1 - 3$

– مجال تغير C_2 الذي لا يؤثر على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي:

بعد قسمة معاملات دالة الهدف (المضروبة في – 1) على صف المعاملات غير الصفرية للمتغير (X2) في القيود الفنية نحصل على القيم التالية:

$\frac{-3}{4} \div \frac{5}{4}$ ، $\frac{-3}{2} \div \frac{-1}{2}$، $\frac{-37}{4} \div \frac{3}{4}$، بعد الاختصار تنتج القيم التالية:

$\frac{-37}{3}$، 3، $\frac{-3}{5}$، وأصغر قيمة موجبة من بينها هي(3) وأكبر قيمة سالبة هي **(- 0,6)**

فيكون مجال تغير (C_2) هو: $-0{,}6 \le \Delta C_2 \le 3$، أي أن:

$6 - 06 \le C_2 \le 6 + 3$ مما ينتج عنه المجال التالي: **$5{,}4 \le C_2 \le 9$.**

لقد رأينا سابقا الحالات التي تكون فيها معاملات متغيرات دالة الهدف معلومة ومحددة: معاملات متغيرات دالة الهدف وهي (C_j) والتي ترمز عادة إلى الدخل الأحادي، الربح الأحادي، التكلفة، ثمن البيع الأحادي وغيرها من المؤشرات الأحادية. ورأينا أيضا الحالات أين يكون الطرف الأيمن من القيود الفنية كذلك معلوما: الطرف الأيمن من القيود الفنية وهي قيم (b_i) والتي ترمز إلى محدودية الموارد (الميزانية، الزمن المخصص للنشاط الاقتصادي، طاقات الإنتاج والتخزين، الكميات المتوفرة من الموارد المختلفة وغيرها من وسائل النشاط الاقتصادي).

لكن في الواقع وفي كثير من الحالات فإن هذه المعاملات لا تكون محددة ومعروفة مسبقا، نظرا لأن بعض العوامل السوقية التي تساهم في تحديدها لا تكون معروفة مسبقا وتتميز بالتغير المستمر.

لذلك عالجنا أعلاه مسألة حساسية دالة الهدف لتغيرات في معاملاتها (C_j) وللتغيرات في كمية الموارد المتاحة (b_i)، وركزنا خاصة على تحديد المجال الذي يمكن أن يحدث فيه ذلك التغير ولكن بدون أن يؤثر على برنامج النشاط الأمثل (برنامج الإنتاج الأمثل).

إن معاملات دالة الهدف، وهي مؤشرات اقتصادية، لا يمكن أن تبقى ثابتة ولا يمكن حتى أن يبقى تغيرها محصورا في حدود معينة بذاتها وذلك نظرا لأن مقومات النشاط الاقتصادي تتغير باستمرار متأثرة بديناميكية السوق. لذلك فإننا سوف

نفترض الآن أن واحدا من معاملات دالة الهدف (C_j) أو بعضها غير معروف وغير محدد مسبقا وسنحاول تغييره عبر كل مجال تغير القيم، وسنحاول دراسة تأثير ذلك التغير على القيمة المثلى لدالة الهدف من خلال التعبير عليه من خلال وسيط متغير ما (un paramètre).

2 – تحديد مجال التغير في (C_j) الذي يؤثر على قيمة الحل الأمثل (X_j):

من أجل تبسيط دراسة تأثير تغير معاملات دالة الهدف على برنامج النشاط الأمثل وبالتالي على القيمة المثلى لدالة الهدف، سنحاول أن نغير في كل مرة معامل واحد فقط ونثبت الآخرين ثم نقيم تأثير ذلك التغيير على دالة الهدف.

سنعالج هذه الحالة من خلال المثال التالي:

نفترض أن مؤسسة اقتصادية ما تنتج ثلاث أنواع من الأفرشة وهي: (A_3, A_2, A_1)، برنامج إنتاجها محدد بشروط الإنتاج التي تتحكم فيها العوامل التالية:

– طاقة الإنتاج القصوى من أنواع الأفرشة الثلاثة هي:

$A_3 \leq 1500$, $A_2 \leq 500$, $A_1 \leq 1000$ ،

–وقت العمل المستهلكلإنتاج كل وحدة واحدة من المنتجات الثلاثة هو كالتالي:

A_1	A_2	A_1	وقت العمل الأقصى المتاح
$\frac{1}{75}$ساعة	$\frac{1}{25}$ ساعة	$\frac{1}{50}$ساعة	45 و.ز.

– إمكانيات المؤسسة محدودة بطاقة التخزين للمنتجات الجاهزة وهي معبر عنها بمساحة التخزين لكل وحدة من الأفرشة الثلاثة كالتالي :

A_3	A_2	A_1	طاقة التخزين القصوى
02 م^2	02 م^2	01 م^2	4000 م^2

- إذا افترضنا أن الربح الذي تحققه هذه المؤسسة من بيع وحدة واحدة من الأفرشة الثلاثة هو **ثابت** كما هو معطى في الجدول التالي:

C_3	C_2	C_1
04و.ن.	12و.ن.	03و.ن.

ما هو وضع النشاط الأمثل لهذه المؤسسة الذي يسمح لها بتعظيم أرباحها في حدود الإمكانيات المتوفرة لها.

من أجل الإجابة على هذا السؤال وفي حدود القيم الثابتة (الستاتيكية) لمعطيات نشاط المؤسسة، نكون أولا النموذج الخطي المعبر على نشاط المؤسسة كالتالي:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 12X_2 + 3X_3$$

$$X_1 \leq 1000$$

$$X_2 \leq 500$$

$$X_3 \leq 1500$$

$$\frac{1}{50}X_1 + \frac{1}{25}X_2 + \frac{1}{75}X_3 \leq 45$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 4000$$

$$X_j \geq 0$$

مادام أن كل معاملات دالة الهدف وأيضا الطرف الأيمن من القيود الفنية، المحددة لإمكانيات نشاط المؤسسة، كلها ثابتة ومحددة، فإننا نستطيع حل هذا النموذج باستعمال طريقة simplex. فنحصل على الحل الأمثل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	0	4	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	11437,5
X_1	1	0	0	0	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	375
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	187,5
X_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1312,5
S_1	0	0	0	1	2	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	625

– حجم الإنتاج الأمثل الذي يسمح للمؤسسة المذكورة من تعظيم أرباحها في حدود الموارد المتاحة لها هو:

من الفراش الأول كمية مقدارها ($X_1 = 375$) ومن الفراش الثاني كمية مقدارها ($X_2 = 500$) ومن الثالث كمية ($X_3 = 1312,5$)، هذه الكميات من الإنتاج تسمح للمؤسسة بتحقيق ربح أقصى مقداره هو: ($Z = 11437,5$).

دراسة الحالة الديناميكية:

المرحلة الأولى: نبدأ في هذه المرحلة بتحديد مجال تغير هوامش الربح للمنتجات الثلاثة وهي (C_3 , C_2 , C_1) التي تؤدي إلى تغير مقدار الربح الأقصى الممكن الحصول عليه بدون ما تؤدي إلى تغيير حجم الإنتاج الأمثل، المحصل عليه عند ثبات هذه الهوامش:

– بالنسبة لـ C_1:

$\frac{-4}{-2}$، $\frac{1}{2} \div \frac{-5}{4}$ ، $\frac{-1}{2} \div \frac{-1}{4}$ ، وبعد الاختصار تنتج القيم التالية:

(2، -2,5 ، 0,5)، وأصغر قيمة موجبة من بينها هي (0,5) وأكبر قيمة سالبة هي (- 2,5) فيكون مجال تغير (C_1) هو: $- 2,5 \leq \Delta C_1 \leq 0,5$ ، أي:

$4-0,5 \leq C_1 \leq 4 + 0,5$.

مما ينتج عنه المجال التالي: $1,5 \leq C_1 \leq 4,5$.

– بالنسبة ل C_2:

$0 \div \frac{-5}{4}$ ،($\frac{-4}{+1}$)،($\frac{-1}{4} \div 0$)، بعد الاختصار تنتج القيم التاليـة:

(-4، -∞، -∞)، ولا توجد قيم موجبة من بينها فالحد الأعلى لتغير (C_2) هو (∞) وأكبر قيمة سالبة هي (4 –) فيكون مجال تغير (C_2) هو: $-4 \leq \Delta C_2 \leq \infty$، أي:

$12-4 \leq C_2 \leq 12+\infty$، مما ينتج عنه المجال التالي: $8 \leq C_2 \leq \infty$.

– بالنسبة لـ C_3:

بنفس المنهج نستخرج مجال تغير هامش الربح الثالث (C_3) الذي لا يؤدي إلى تغير برنامج الإنتاج الأمثل وهو: $\frac{8}{3} \leq C_3 \leq 8$.

المرحلة الثانية: ندرس الآن إمكانية تغير كل من هوامش الربح الثلاثة في المجال من (0) إلى (∞) ونحاول حصر تأثير هذه التغيرات على دالة الهدف للمؤسسة محل الدراسة، مع مراعاة أنه في المرحلة الحالية سوف نكتفي بتغيير هامش واحد فقط مع تبيت الهوامش الأخرى.

تغيير (C_1):

نفترض في هذه المرحلة من الدراسة أن معامل المتغير الأول لدالة الهدف، وهو الربح الأحادي للفراش الأول (C_1)، هو معرف بطريقة نسبية، أي أن هناك عوامل سوقية مختلفة تؤثر عليه لا تسمح لنا بقياسه بطريقة محددة. هذه العوامل تؤدي إلى تغيره (تأرجحه) حول القيمة السابقة (4 و.ن.).

نفترض على سبيل المثال أن (C_1) يمكن قياسه كالتالـــــي: ($C_1 = 4+4\lambda$)، حيث (λ) هو وسيط مجهول يمثل العوامل الأخرى السوقية وغيرها المحتملة التأثير على هامش الربح للمنتج الأول.

الآن يمكن لنا دراسة أثر تغير (λ) على تغير (C_1)، وبالتالي تأثير هذا الأخير على دالة الهدف، حيث أننا نعرف أن: $0 \leq C_1 \leq \infty$، أي: $0 < 4(1+\lambda) < \infty$، مما يعني أن: $-1 < \lambda < \infty$.

من أجل حل النموذج الخطي الخاص بنشاط المؤسسة المذكورة في المثال السابق، أول مدخل يتبادر إلى الذهن هو أن نعيد حل النموذج من جديد وذلك باعتبار (C_1) مجهول القيمة. فيكون جدول الحل الابتدائي المقبول هو كالتالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	$-C_1$	- 12	- 3	0	0	0	0	0	0
S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
S_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	0	0	1	0	0	1500
S_4	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{75}$	0	0	0	1	1	45
S_5	1	2	2	0	0	0	0	0	4000

في إطار البحث عن الحل الأمثل لهذا النموذج نبدأ في اختيار المتغير الذي نقوم بإدخاله إلى قاعدة الحل، وعندئذ نلاحظ أن قيمة معامل (X_1) في دالة الهدف تحتوي على جزء مجهول يتمثل في (λ) وهو الوسيط المجهول. وهذا ما يجعل مجال هذا المعامل واسع جدا يشمل قيم أصغر من (C_2) و(C_3) وقيم أكبر منهما، فلا نستطيع والحالة هذه تحديد المتغير الذي نبدأ بإدخاله إلى قاعدة الحل وبالتالي لا نستطيع البحث عن الحل الأمثل في هذه الحالة.

من أجل أن نتمكن من مواصلة الحل، سنتبع المنهج التالي: نجزأ مجال تغير (C_1) ونقارنه بقيمة (C_2) وهي-12 وقيمة (C_3) وهي-3، حتى نتمكن من معرفة من هو المتغير الذي يدخل قبل غيره إلى قاعدة الحل.

الحالة الأولى	$-1 < \lambda < \frac{-1}{4}$	$0 < 4 + 4\lambda < 3$	$0 < C_1 < 3$
الحالة الثانية	$\frac{-1}{4} < \lambda < 2$	$3 < 4 + 4\lambda < 12$	$3 < C_1 < 12$
الحالة الثالثة	$\lambda > 2$	$4 + 4\lambda > 12$	$C_1 > 12$

الحالة الأولى: نبدأ الحل بالحالة عندما(C_1) يتغير من(0) إلى قيمة تقترب من(3)، في هذه الحالة فإن (λ) تتغير من (-1) إلى قيمة تقترب من $\frac{-1}{4}$. بعد ضرب قيم معاملات دالة الهدف في جدول الحل الابتدائي في (-1)، فتصبح (-3)، (-12)، [3-,0]. ويصبح جدول الحل الابتدائي الجديد كالتالي:

Z	X_1	↓X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	[0 , - 3 [	- 12	- 3	0	0	0	0	0	0
S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
← S_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	0	0	1	0	0	1500
S_4	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{75}$	0	0	0	1	0	45
S_5	1	2	2	0	0	0	0	1	4000

أصغر قيمة من بين قيم معاملات دالة الهدف الآن هي (-12) وهي معامل (X_2)، فيدخل إذن (X_2) إلى قاعدة الحل ويخرج المتغير (S_2). ونحصل بعدها على نتيجة **المحاولة الأولى** كالتالي:

Z	X_1	X_2	↓X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	[0 , - 3 [	0	- 3	0	12	0	0	0	6000
S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
← S_3	0	0	0	0	0	1	0	0	1500
S_4	$\frac{1}{50}$	0	$\frac{1}{75}$	0	$\frac{-1}{25}$	0	1	0	25
S_5	1	0	2	0	-2	0	0	1	3000

يدخل الآن المتغير (X_3) ويخرج (S_3) ونحصل على نتيجة **المحاولة الثانية** كالتالي:

Z	↓X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	]0 , -3[	0	0	0	12	3	0	0	10500
S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
X_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
S_4	$\frac{1}{50}$	0	0	0	$\frac{-1}{25}$	$\frac{-1}{75}$	1	1	5
←S_5	1	0	0	0	-2	-2	0	0	0

يدخل الآن المتغير (X_1) ويخرج (S_5) ونحصل على نتيجة **المحاولة الثالثة** كالتالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	0	$4 - 8\lambda$	$-5 - 8\lambda$	0	$4 + 4\lambda$	10500
S_1	0	0	0	1	2	2	0	-1	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
X_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
S_4	0	0	0	0	0	$\frac{2}{75}$	1	$\frac{-1}{50}$	5
X_1	1	0	0	0	-2	-2	0	1	0

نبحث الآن هل وصلنا إلى حل أمثل أم لا، هناك قيمتين غير محددتين من بين معاملات دالة الهدف: ($4-\lambda 8$) وهي معامل (S_2) و ($-5-8\lambda$) وهي معامل (S_3). نبحث عن القيم التي يمكن أن تأخذها هذه المعاملات في مجال تغير (λ) الحالي وهو ($-1<\lambda<-\frac{1}{4}$).

الجدول التالي يتضمن قيم تغير معاملات (S_5 , S_3 , S_2) في مجال تغير(λ) الحالي وهو ($-1<\lambda<-\frac{1}{4}$).

مجال تغير λ	-1	$-\frac{5}{8}$ $-\frac{1}{4}$
قيم معامل S_3 ($-5-8\lambda$)	موجب في هذا الجزء من المجال(+)	سالب في هذا الجزء من المجال (−)
قيم معامل S_2 ($4-8\lambda$)	موجب في كل هذا المجال (+)	
معامل S_5 ($4+4\lambda$)	موجب في كل هذا المجال (+)	

إذن في المجال ($-1<\lambda<-\frac{5}{8}$) تكون قيم كل معاملات دالة الهدف موجبة وبالتالي تكون قيمة الحل المحصل عليه سابقا (10500) هو الحل الأمثل.

أما في المجال ($-\frac{5}{8}<\lambda<-\frac{1}{4}$) يكون معامل ($S_3$)سالبا وبالتالي فإن قيمة الحل المحصل عليه أعلاه لا يعتبر حلا أمثلا في هذا الجزء من مجال تغير معامل (S_3). في هذه الحالة يجب مواصلة البحث عن الحل الأمثل للنموذج وذلك بإدخال المتغير (S_3) إلى قاعدة الحل وإخراج المتغير (S_4). فنحصل بعد هذا على نتيجة **المحاولة الرابعة** في الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	0	$4-8\lambda$	0	$\frac{375}{2}+300\lambda$	$\frac{1}{4}-6\lambda$	$11437,5+1500\lambda$
S_1	0	0	0	1	2	0	-75	$\frac{1}{2}$	625
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
X_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{-75}{2}$	$\frac{3}{4}$	1312,5
S_3	0	0	0	0	0	1	$\frac{75}{2}$	$\frac{-3}{4}$	187,5
X_1	1	0	0	0	-2	0	75	$\frac{-1}{2}$	375

بعد تحليل قيم معاملات دالة الهدف في الجزء من مجال تغير (λ) الذي نحن بصدد دراسته وهو ($-\frac{5}{8} < \lambda < \frac{1}{4}$) نجد أن قيم كل المعاملات هي موجبة أو صفر بما فيها معاملات (S_2, S_4, S_5)، وبالتالي فإن النتيجة المحصل عليها في هذا الجدول تمثل حلا أمثلا في هذا الجزء من مجال تغير (λ).

	ملخص الحالة الأولى: حالة تغير معامل X_1 في المجال: $0 < C_1 < 3$
$Z_{max} = 10500$	التغير في الجزء من المجال: $0 < C_1 < 1,5$ أو تغير λ في الجزء من المجال $-1 < \lambda < -\frac{5}{8}$
$Z_{max}=11437,5 + 1500\lambda$	التغير في الجزء من المجال : $1,5 < C_1 < 3$ أو تغير λ في الجزء من المجال: $\frac{-5}{8} < \lambda < \frac{-1}{4}$

الحالة الثانية: عندما يتغير (C_1) في المجال: $3 \leq C_1 < 12$ أي تغير (λ) في المجال $(-\frac{1}{4} < \lambda < 2)$:

عندما يتغير (C_1) من 3 إلى قيمة نقترب من (12)، فإن معاملات دالة الهدف بعد ضربها في (-1) تصبح كالتالي: (C_1 - ،12 - ،3 -).

في هذه الحالة أيضا فإن أصغر قيمة سالبة من بين معاملات دالة الهدف هي (-12) وهي معامل (X_2)، على أساس أن معامل (X_1) وهو (C_1) هو أقل من12.

ويكون جدول الحل الابتدائي في هذه الحالة كالتالي:

Z	X_1	↓ X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	[-3 , - 12[	- 12	- 3	0	0	0	0	0	0
S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
← S_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
S_4	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{75}$	0	0	0	1	0	45
S_5	1	2	2	0	0	0	0	1	4000

من أجل البحث عن الحل الأمثل ندخل المتغير (X_2) ونخرج المتغير (S_2)، فنحصل على نتيجة **المحاولة الأولى** كالتالي:

Z	↓ X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	[-3 , -12[	0	- 3	0	12	0	0	0	6000
← S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
S_4	$\frac{1}{50}$	0	$\frac{1}{75}$	0	$\frac{-1}{25}$	0	1	0	25
S_5	1	0	2	0	-2	0	0	1	3000

بعد دخول (X_1) وخروج (S_1) نحصل على نتيجة المحاولة الثانية كالتالي:

Z	X_1	X_2	↓ X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	- 3	4+4 λ	12	0	0	0	10000+ 4000 λ
X_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
S_4 ←	0	0	$\frac{1}{75}$	$\frac{-1}{50}$	$\frac{-1}{25}$	0	1	0	5
S_5	1	0	2	-1	-2	0	0	1	2000

بعد دخول (X_3) نحصل على نتيجة التالية **المحاولة الثالثة** كما يلي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	$\frac{1}{2}+4\lambda$	3	0	225	0	$11125+4000\lambda$
X_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	1.5	3	1	-75	0	1125
X_3	0	0	1	-1.5	-3	0	75	0	375
S_5	0	0	0	2	4	0	-150	1	1250

لا نعرف الآن هل النتيجة المحصل عليها في هذا الجدول تشكل حلا أمثلا لهذا النموذج في مجال تغير (C_1) الحالي أم لا.

نلاحظ أن معامل (S_1) غير محدد، فنبحث عن قيم تغير هذا المعامل في المجال ($-\frac{1}{4} < \lambda < 2$).

مجال تغير λ	$-\frac{1}{4}$ ... $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$ ... 2
قيم معامل S_1 ($-\frac{1}{2}+8\lambda$)	سالب في هذا الجزء من المجال (-)	موجب في هذا الجزء من المجال (+)

إذن في المجال ($\frac{1}{8} < \lambda < 2$) كل معاملات دالة الهدف موجبة وبالتالي فالحل المحصل عليه أعلاه يعتبر حلا أمثلا.

أما في المجال ($-\frac{1}{4} < \lambda < \frac{1}{8}$) فمعامل (S_1) سالب وبالتالي فالحل المحصل عليه سابقا يعتبر غير أمثل، فنواصل البحث عن الحل الأمثل في هذا الجزء من المجال، وذلك بإدخال (S_1) وإخراج (S_5)،، فنحصل على النتائج الممثلة في الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	0	$4 - 8\lambda$	0	$375+ 300\lambda$	$\frac{1}{4} - 2\lambda$	$11437{,}5 + 1500\lambda$
X_1	1	0	0	0	-2	0	75	$\frac{-1}{2}$	375
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	0	0	1	-37,5	-3	187,5
X_3	0	0	1	0	0	0	37,5	$\frac{3}{4}$	1312,5
S_1	0	0	0	1	2	0	-75	$\frac{1}{2}$	625

كل معاملات دالة الهدف الآن موجبة في الجزء من مجال تغير (λ) الحالي وهو ($\frac{-1}{4} < \lambda < \frac{1}{8}$)، بما فيها معاملات ($S_2$, S_4, S_5)، وبالتالي فقيمة الحل المحصل عليه الآن يعتبر حلا أمثلا في الجزء المشار إليه من مجال تغير (λ).

	ملخص الحالة الثانية: حالة تغير معامل X_1 في المجال: $3 < C1 < 12$
$Z_{max} = 11437{,}5 + 1500\lambda$	التغير في الجزء من المجال: $3 < C_1 < 4{,}5$ أو تغير λ في الجزء من المجال: $\frac{-1}{4} < \lambda < \frac{1}{8}$
$Z_{max} = 11125 + 4000\lambda$	التغير في الجزء من المجال: $4{,}5 < C_1 < 12$ أو تغير λ في الجزء من المجال: $\frac{1}{8} < \lambda < 2$

الحالة الثالثة: عندما يتغير (C_1) في المجال: $C_1 > 12$ أي تغير (λ) في المجال ($\lambda \geq 2$):

في هذه الحالة تصبح معاملات دالة الهدف، بعد ضربها في (-1) كالتالي: $(-C_1 , -12 , -3)$.

في هذه الحالة أصغر قيمة سالبة من بين هذه المعاملات هي $(-C_1)$، فيدخل الآن المتغير (X_1) ويخرج (S_1). ويكون جدول الحل الابتدائي كالتالي:

Z	↓X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	]- 12 , - ∞]	- 12	- 3	0	0	0	0	0	0
←S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
S_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
S_4	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{75}$	0	0	0	1	0	45
S_5	1	2	2	0	0	0	0	1	4000

بعد إدخال المتغير (X_1) نحصل على جدول **المحاولة الأولى** التالي:

Z	X_1	↓X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	-12	- 3	4+4λ	0	0	0	0	4000+ 4000 λ
X_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
←S_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
S_4	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{75}$	$\frac{-1}{50}$	0	0	1	0	25
S_5	0	2	2	-1	0	0	0	1	3000

بعد ذلك نحصل على جدول **المحاولة الثانية** كالتالي:

Z	X_1	X_2	↓ X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	- 3	$4+4\lambda$	12	0	0	0	10000 $+4000\lambda$
X_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
S_4 ←	0	0	$\frac{1}{75}$	$\frac{-1}{50}$	$\frac{-1}{25}$	0	1	0	5
S_5	0	0	2	-1	-2	0	0	1	2000

دخول (X_3) إلى قاعدة الحل يعطي النتيجة التالية:

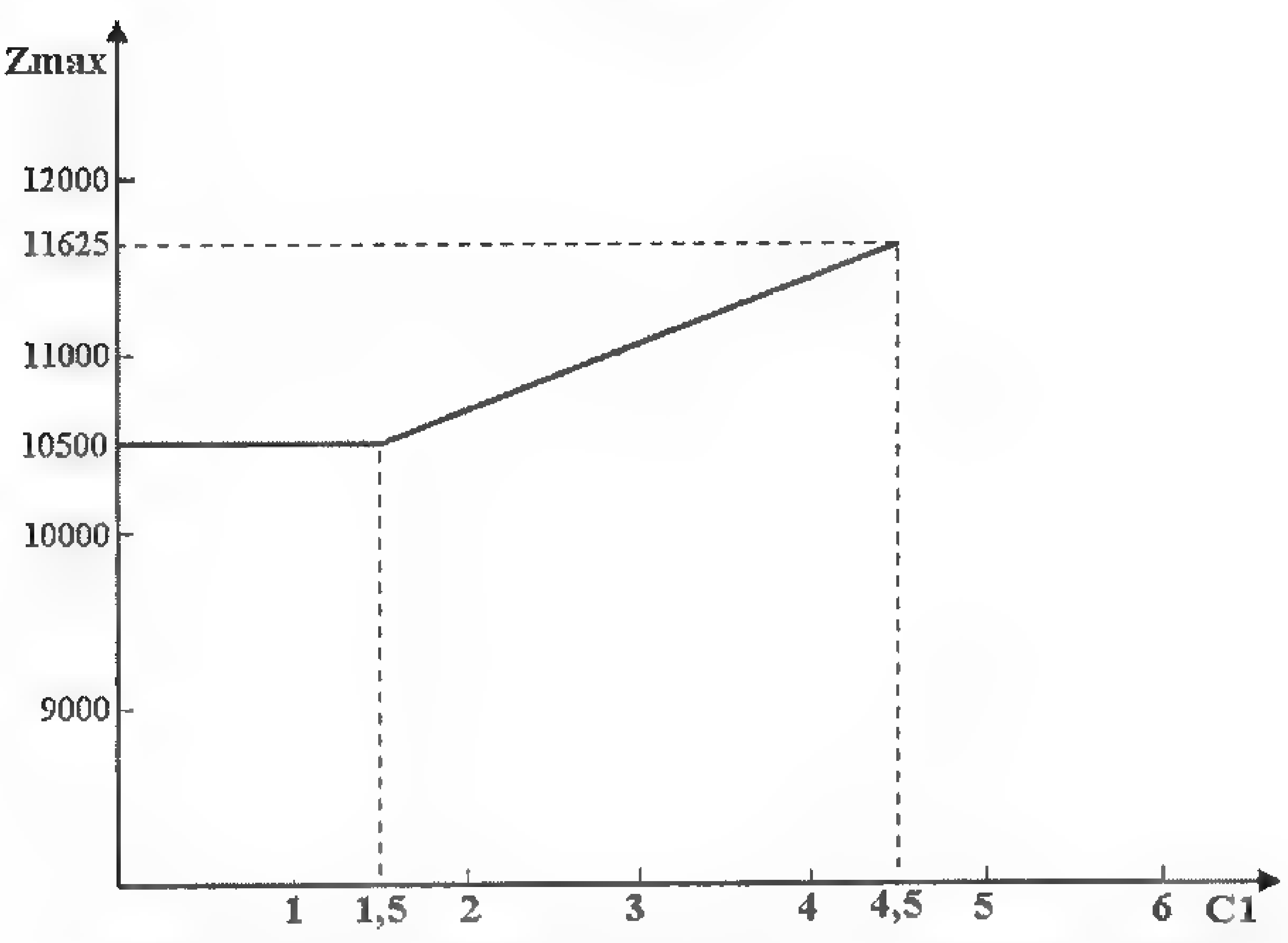
Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	$\frac{1}{2}+4\lambda$	3	0	225	0	11125 $+4000\lambda$
X_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	1,5	3	1	-75	0	1125
X_3	0	0	1	-1,5	-3	0	75	0	375
S_5	0	0	0	2	4	0	-150	1	1250

هذا الجدول يمثل حلا أمثلا نظرا لأن كل معاملات دالة الهدف موجبة في المجال الحالي لتغير (λ)، بما فيها معامل (S_1). نورد فيما يلي **ملخص عام للحلول المثلى** نتيجة لتغير (C_1).

λ	-1	$\frac{-5}{8}$	$\frac{1}{8}$ +∞
C_1	**0**	**1,5**	**4,5** +∞
X_1	0	375	1000
X_2	500	500	500
X_3	1500	1312,5	375
S_1	1000	625	0
S_2	0	0	0
S_3	0	187,5	1125
S_4	5	0	0
S_5	0	0	1250
Z_{max}	10500	11437,5 +1500λ	11125 +4000 λ
	10500	**10500**	**11625**

يمكن تصوير الملخص العام للحلول المثلى نتيجة تغير (C_1) وهو معامل (X_1) في دالة الهدف، بواسطة الرسم البياني كالتالي:





طريقة أخرى لإيجاد مجمل قيم الحلول المثلى نتيجة تغير معاملات دالة الهدف:

من أجل إجراء مسح شامل لمختلف الحلول المثلى الممكن الحصول عليها نتيجة تغير معاملات دالة الهدف، ليس من الضروري إعادة الحل من البداية (من الحل الابتدائي) وذلك باعتبار (C_1) مجهول تماما، بل نستطيع أن ننطلق من الحل الأمثل المحصل عليه سابقا عندما كان ($C_1 =4$)، ثم ندخل تغيرات على (C_1) بالزيادة والنقص ونحاول دراسة أثر ذلك التغير على القيمة المثلى لدالة الهدف.

تتمثل هذه الطريقة المختصرة في إجراء محاولة للبحث عن حل أمثل أحسن من الحل الأمثل السابق نتيجة لتغير قيمة (C_1)، وذلك بالاعتماد على الحل الأمثل المحصل عليه عندما كانت قيمة (C_1) ثابتة ($C_1 =4$)، عوض إعادة الحل من جديد.

تغيير (C_1): إذا أردنا أن نتوسع في دراسة تأثير تغير (λ) على(C_1) وتأثير هذا الخير على القيمة المثلى لدالة الهدف، فإننا نتبع الخطوات التالية: حيث أن (λ) هو الوسيط الذي نعبر من خلاله على قيمة (C_1).

1 – نضيف إلى جدول الحل الأمثل السابق (عندما كانت C_1 تساوي 4) عمود إضافي نسميه (C_i)، ونضيف كذلك صف إضافي لقيم معاملات دالة الهدف (C_j) المحصل عليها عند الحل الابتدائي، بحيث أن (C_1) يعبر عنه بقيمته الجديدة ($4+4\lambda$).

2 – نأخذ جدول الحل الأمثل السابق، المحصل عليه عندما كانت قيمة (C_1) هي (4)، ونغير سطر معاملات دالة الهدف فيه وفق الصيغة التالية: $\Delta_j = C_j - \sum a_{ij} \cdot C_i$، حيث: ($a_{ij}$) هي قيم معاملات ($X_i$) في جدول الحل الأمثل. فنحصل على قيم جديدة لها نسميها (Δ_j).

إن إنجاز هذه الخطوات بالنسبة لجدول الحل الأمثل السابق، يعطينا الجدول التالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
C_i	Z	0	0	0	0	4	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	11437,5
$4+4\lambda$	X_1	1	0	0	0	-2	0	0,5	$\frac{-1}{2}$	375
12	X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
0	S_3	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	187,5
3	X_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1312,5
0	S_1	0	0	0	1	2	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	625
	C_j	$4+4\lambda$	12	3	0	0	0	0	0	

نحسب الآن معاملات متغيرات دالة الهدف في وضعها الأمثل بعد تغيير قيمة (C_1)، أي باعتبار قيمة (C_1) غير المحددة.

$\Delta_1 = C_1 \sum a_{i1} . C_i = 4(1 + \lambda) - [1 \times 4(1 + \lambda) + 12 \times 0 + 3 \times 0]$

$= 4(1 + \lambda) - 4(1 + \lambda) = 0$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = 12 - [4(1 + \lambda) \times 0 + 12 \times 1 + 3 \times 0] = 12 - 12 = 0$

$\Delta_2 = 0$

$\Delta_3 = 3 - [0 \times 4(1 + \lambda) + 12 \times 0 + 0 \times 0 + 3 \times 1 + 0 \times 0] = 3 - 3 = 0$

$\Delta_3 = 0$

$\Delta_4 = 0 - 0 = 0$

$\Delta_5 = 0 - [(-2) \times 4(1 + \lambda) + 12 \times 1 + 0 \times 0 + 3 \times 0 + 0 \times 2]$

$= 0 - [(-8) \times (1 + \lambda) + 12] = 8(1 + \lambda) - 12 = -4 + 8\lambda$

$\Delta_5 = -4 + 8\lambda$

$\Delta_6 = 0 - [1 \times 0] = 0$

$\Delta_6 = 0$

$\Delta_7 = 0 - [(\frac{1}{2}) \times 4(1 + \lambda) + 12 \times 0 + 0 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times 3 + 0 \times \frac{-1}{2}]$

$= 0 - [(2) \times (1 + \lambda) - \frac{1}{4} \times 3] = -\frac{5}{4} - 2\lambda$

$\Delta_7 = -\frac{5}{4} - 2\lambda$

$\Delta_8 = 0 - [(\frac{-1}{2}) \times 4(1 + \lambda) - \frac{3}{4} \times 0 + \frac{3}{4} \times 3 + \frac{1}{2} \times 0]$

$\Delta_8 = -\frac{1}{4} + 2\lambda$

قيم Δ_j هي عبارة عن قيم معاملات دالة الهدف بعد المحاولة الجديدة، نضرب معاملات دالة الهدف الجديدة (قيم Δ_j) في (1-) حتى نتعرف عن طبيعة الحل المحصل عليه: هل هو حل أمثل أم لا.

فنحصل على جدول الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	0	$4-8\lambda$	0	$\frac{5}{4}+2\lambda$	$\frac{1}{4}-2\lambda$	$11437{,}5+1500\lambda$
X_1	1	0	0	0	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	375
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	187,5
X_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1125
S_1	0	0	0	1	2	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	312,5

لا نعرف الآن هل أن معاملات المتغيرات (S_2)، (S_4)،(S_5) هي موجبة أم سالبة: لذلك نضع جدول لدراسة تغيرات هذه المعاملات حسب القيم التي تأخذها (λ).

λ	-1 … $\frac{-5}{8}$	$\frac{-5}{8}$ … $\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$ … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … $\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$ … ∞
$4-8\lambda$	+	+	+	-	-
$\frac{5}{4}+2\lambda$	-	+	+	+	+
$\frac{1}{4}-2\lambda$	+	+	-	-	-
	في هذا الجزء من المجال معامل S_4 سالب، فيدخل S_3 ويخرج S_4	في هذا الجزء من المجال لا يوجد أيمعامل سالب: الحل هنا يعتبر أمثل	هنا معامل S_5هو الوحيد السالب: فيدخل S_5 ويخرجS_1	هناك قيمتين سالبتين، لكن معامل S_5 هو الأصغر فيدخل S_5 ويخرج S_1	هناك قيمتين سالبتين، لكن معامل S_2 هو الأصغر فيدخل S_2 ويخرج S_1

الحالة الأولى: حالة المجال ($-1 \leq \lambda < \frac{-5}{8}$):

كما تمت الإشارة إليه في الجدول أعلاه، فإنه في هذا المجال لازال الحل غير أمثل: ويجب إدخال المتغير (S_4) ويخرج المتغير (S_3)، فنحصل على نتيجة المحاولة التالية:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	0	$4 - 8\lambda$	$-5 - 8\lambda$	0	$4+4\lambda$	10500
X_1	1	0	0	0	-2	-2	0	$\frac{-1}{2}$	0
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_4	0	0	0	0	0	4	1	-3	750
X_3	0	0	1	0	0	1	0	$\frac{3}{4}$	1500
S_1	0	0	0	1	2	2	0	$\frac{1}{2}$	1000

هل هذا الجدول يمثل حلا أمثلا؟ نحلل قيم معاملات المتغيرات (S_2)، (S_3)،(S_5) في المجال الحالي لتغير (λ). بعد التحليل نتأكد بأن قيم معاملات المتغيرات المشار إليها كلها موجبة في المجال المشار إليه لـ (λ). وبالتالي فإن هذا الجدول يمثل حلا أمثلا.

الحالة الثانية: حالة المجال: ($\frac{-5}{8} \leq \lambda < \frac{1}{8}$)

نظرا لأن معاملات دالة الهدف في هذا المجال كلها موجبة أو صفر، فإن الحل المحصل عليه سابقا يبقى هو نفسه الحل الأمثل في هذا المجال.

الحالة الثالثة: حالة المجال:λ ($\frac{1}{8} \leq \lambda < \frac{1}{2}$)

في هذه الحالة يدخل إلى قاعدة الحل المتغير (S_5) ويخرج المتغير (S_1)، فنحصل نتيجة لذلك على الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	$\frac{-1}{2} + 4\lambda$	3	0	1,5	0	11125+ 4000 λ
X_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	1,5	3	1	-1,5	0	1125
X_3	0	0	1	-1,5	-3	0	1,5	0	375
S_5	0	0	0	2	4	0	-1	1	1250

نلاحظ أن قيم معاملات دالة الهدف كلها موجبة أو صفر، وبالتالي فالحل المحصل عليه هنا هو أيضا حل أمثل في المجال المعطى لتغير (λ).

الحالة الرابعة: حالة المجال:($\frac{1}{2} \leq \lambda < \frac{1}{1,6}$)

في هذا المجال يدخل (S_5) ويخرج (S_1)، فنحصل على الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	3,5 -4 λ	-1 + 8 λ	0	1,5	0	11125 +4000 λ
X_1	1	0	0	2	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	1,5	3	1	-1,5	0	1125
X_3	0	0	1	-1,5	-3	0	1,5	0	375
S_5	0	0	0	2	4	0	-1	1	1250

كل معاملات دالة الهدف موجبة أو صفر، ونتيجة هذا الجدول تشكل حلا أمثلا في المجال المعطى لتغير (λ).

الحالة الخامسة: حالة المجال: $(\lambda > \frac{1}{1,6})$

هنا يدخل المتغير (S_2) ويخرج المتغير (S_1)، كما هو مبين في الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5 ↓	Sol
Z	0	0	0	$-2+4\lambda$	0	0	$\frac{9}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$10187,5+4000\lambda$
X_1	1	0	0	2	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	-1,5	0	0	0,25	-0,25	187,5
S_3	0	0	0	0	0	1	0,25	-3/[illegible]	187,5
X_3	0	0	1	0	0	0	-0,25	3/[illegible]	1312,5
S_2 ←	0	0	0	1,5	1	0	-0,25	0,25	312,5

لا زال الحل غير أمثل، ويدخل المتغير (S_5) ويخرج (S_2)، وعلى إثر هذه المحاولة نحصل على النتيجة التالية:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	$\frac{-1}{2}+4\lambda$	3	0	1,5	0	$11125+4000\lambda$
X_1	1	0	0	2	0	0	0	0	0
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	1,5	4	1	-1,5	0	750
X_3	0	0	1	-1,5	-3	0	1,5	0	1500
S_5	0	0	0	2	4	0	-1	1	1000

في هذا الجدول كل قيم معاملات دالة الهدف موجبة أو صفر وبالتالي فهذا الجدول يمثل حلا أمثلا في مجال تغير (λ) الحالي.

في الخلاصة نسجل أن ملخص الحلول المثلى، نتيجة تغيير (C_1)، هو نفسه الذي حصلنا عليه سابقا عند استعمال الطريقة المطولة.

تغيير (C_2):

نأتي الآن إلى مرحلة تحليل تغيرات (C_2) وهو معامل (X_2) في دالة الهدف لنفس النموذج الذي نحن بصدده.

نفترض أن (C_2) يمكن قياسه كالتالي: $C_2 = 12 + 12\ \lambda$، فيمكن دراسة أثر تغير (λ) على تغير (C_2)، وبالتالي تأثير تغير هذا الأخير على قيمة دالة الهدف.

نحن نريد أن نغير (C_2) في المجال: $0 < C_2 < \infty$ ، ووفقا لذلك تتغير (λ) في المجال:

$0 < 12 + 12\ \lambda < \infty$، أي: $-1 < \lambda < \infty$.

نضيف إلى جدول الحل الأمثل السابق (عندما كانت C_2 تساوي 12) عمود إضافي نسميه (C_1)، ونضيف كذلك صف إضافي (C_1) لقيم معاملات دالة الهدف المحصل عليها عند الحل الابتدائي، بحيث أن (C_1) يعبر عنه بقيمته الجديدة ($12 + 12\lambda$).

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
C_i	Z	0	0	0	0	4	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	11437,5
4	X_1	1	0	0	0	-2	0	0,5	$\frac{-1}{2}$	375
$(12+12\lambda)$	X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
0	S_3	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	187,5
3	X_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1312,5
0	S_1	0	0	0	1	2	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	625
	C_j	4	$12+12\lambda$	3	0	0	0	0	0	

نحسب الآن معاملات متغيرات دالة الهدف في وضعها الأمثل بعد تغيير قيمة (C_2)، أي باعتبار قيمة (C_2) غير المحددة.

$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} . C_i = 4 - [1 \times 4 + 12(1+\lambda) \times 0 + 0 + 3 \times 0 + 0]$

$= 4 - [4] = 0$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = 12(1+\lambda) - [4 \times 0 - 12(1+\lambda) \times 1 + 3 \times 0 + 0]$

$\Delta_2 = 12(1+\lambda) - [12(1+\lambda)] = 0$

$\Delta_2 = 0$

$\Delta_3 = 3 - [4 \times 0 + 12(1+\lambda) \times 0 + 12 + 0 \times 0 + 3 \times 0 + 0]$

$\Delta_3 = 0$

$\Delta_4 = 0$

$\Delta_5 = 0 - [4 \times (-2) + 12(1+\lambda) \times 1 + 0 \times 0]$

$= 0 - [-8 + 12(1+\lambda)] = -4 - 12\lambda$

$\Delta_5 = -4 - 12\lambda$

$\Delta_6 = 0$

$\Delta_7 = -\frac{5}{4}$

$\Delta_8 = -\frac{1}{4}$

نضرب الآن قيم (Δ_j) في (1-) حتى نأخذها بالسالب، وذلك لكي نتمكن من معرفة هل وصلنا إلى الحل أمثل أم لا. ثم نكون بعد هذا جدول الحل المعدل كالتالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	0	$4 + 12\lambda$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	11437,5 $+6000\lambda$
X_1	1	0	0	0	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	375
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	187,5
X_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1125
S_1	0	0	0	1	2	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	312,5

لا نعرف الآن هل أن معامل المتغير (S_2) هو موجب أم سالب: لذلك نضع جدول وندرس تغيرات هذا المعامل حسب القيم التي تأخذها (λ).

λ	-1 …… $\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$ …… ∞
$4-12\lambda$ معامل (S_2)	$-$	$+$
	في هذا الجزء من المجال يوجد معامل سالب (معامل S_2): الحل هنا يعتبر غير أمثل، فيدخل S_2، ويخرج S_1	كل معاملات دالة الهدف موجبة، فالحل المحصل عليه سابقا يعتبر حلا أمثلا لهذا الجزء من المجال.

الحالة الأولى: حالة المجال ($-1 \leq \lambda < \frac{-1}{3}$)

كما تمت الإشارة إليه في الجدول أعلاه، فإنه في هذا المجال لازال الحل غير أمثل: ويجب إدخال المتغير (S_2) ويخرج المتغير (S_1)، فنحصل على نتيجة المحاولة التالية:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	$-2-6\lambda$	0	0	0	$\frac{9}{4}+3\lambda$	$10187,5+2250\lambda$
X_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	187,5
S_3	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	187,5
X_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1312,5
S_2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	312,5

نحلل قيم معاملات المتغيرات (S_1)، (S_4)، (S_5)) في المجال الحالي لتغير (λ):

λ	-1 ... $\frac{-3}{4}$	$\frac{-3}{4}$ ... $\frac{-1}{3}$
$-2-6\lambda$ معامل S_1	+	+
$\frac{-3}{4}-3\lambda$ معامل S_5	+	+
$\frac{9}{4}+3\lambda$ معامل S_4	−	+
	في هذا الجزء من المجال معامل S_4 سالب، والحل المحصل عليه هو حل غير أمثل، فيدخل S_4 ويخرج S_3 أو X_2 ونختار S_3	في هذا الجزء من المجال لا يوجد أي معامل سالب: الحل الأمثل السابق يعتبر أمثلا هنا.

بعد إدخال (S_4) نحصل على النتيجة التالية:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	$-2-6\lambda$	0	$-9-12\lambda$	0	$6+6\lambda$	8500
X_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	0
S_4	0	0	0	0	0	4	1	-3	750
X_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
S_2	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{-1}{2}$	500

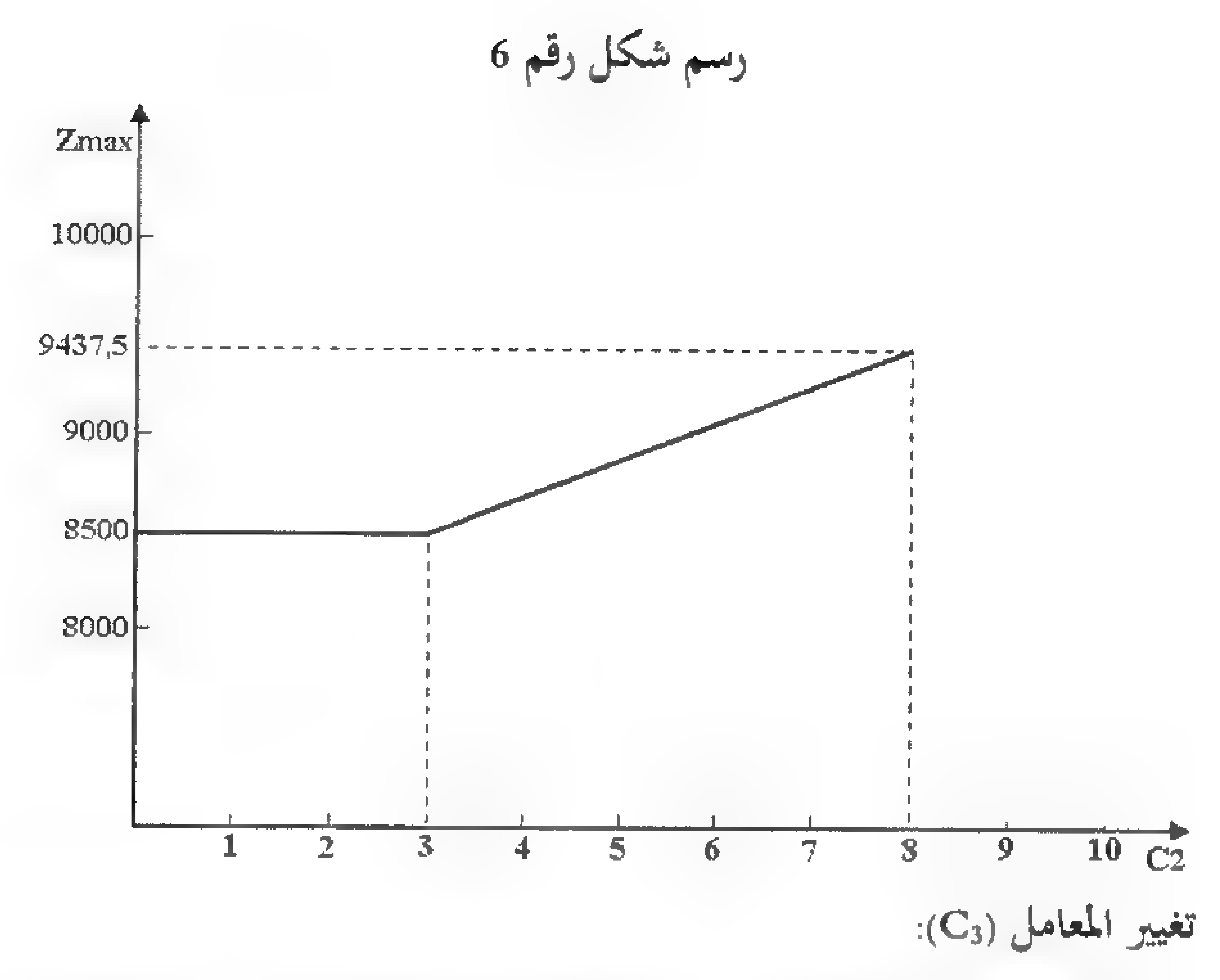
بعد تحليل قيم معاملات (S_1)، (S_3)، (S_5)، نتأكد بأنها كلها موجبة أو صفر، وبالتالي فهذا الجدول يمثل حلا أمثلا لهذه الحالة.

نعطي فيما يلي **ملخص عام للحلول المثلى** نتيجة لتغير (C_2)، وهي نفس الحلول المثلى المتوصل إليها باستعمال الطريقة المطولة.

λ	-1 $\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{3}$	$+\infty$
C_2	0 3	8	$+\infty$
X_1	1000	375	1000
X_2	0	500	500
X_3	1500	1312,5	375
S_1	0	625	0
S_2	500	0	0
S_3	0	187,5	1125
S_4	750	0	0
S_5	0	0	1250
Z_{max}	8500	$10187,5+2250\lambda$	$11437,5+6000\lambda$
	8500	8500	9437,5

يمكن عرض نفس هذا الملخص العام للحلول المثلى، نتيجة تغير (C_2) وهو معامل (X_2) في دالة الهدف، بواسطة الرسم البياني كالتالي:

رسم شكل رقم 6



تغيير المعامل (C_3):

نفترض الآن أن (C_3) يمكن قياسه كالتالي: $C_3=3+3\lambda$، فيمكن إذن دراسة أثر تغير (λ) على (C_3)، وبالتالي تأثير تغير هذا الأخير على قيمة دالة الهدف.

لدينا: $0< C_3 < \infty$، أي: $0 < 3(1+\lambda) < \infty$، مما يعني أن: $-1< \lambda< \infty$

بعد حساب قيم (Δ_j) للحل الأمثل المعدل وضربها في (-1)، نحصل على القيم التالية:

$$\Delta_1 = 0 \ , \ \Delta_2 = 0 \ , \ \Delta_3 = 0 \ , \ \Delta_4 = 0 \ , \ \Delta_5 = 4 \ , \ \Delta_6 = 0$$

$$\Delta_7 = \frac{5}{4} - \frac{3\lambda}{4} \ , \ \Delta_8 = \frac{1}{4} + \frac{9\lambda}{4}$$

بعد ذلك ندخل قيم (Δ_j) الجديدة إلى صف معاملات دالة الهدف في جدول الحل الأمثل، عندما كانت قيمة (C_3) تساوي (3)، فنحصل على الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	0	4	0	$\frac{5}{4}-\frac{3\lambda}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{9\lambda}{4}$	11437,5+39 37,5λ
X_1	1	0	0	0	-2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	375
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	187,5
X_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1312,5
S_1	0	0	0	1	2	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	625

نلاحظ أن قيم معاملات (S_4)، (S_5) هي قيم غير محددة (لا نعرف هل هي قيم موجبة أم سالبة).

فنضع جدولا ندرس فيه تغيرات هذين المعاملين حسب القيم التي تأخذها (λ).

λ	-1 … $\frac{-1}{9}$	$\frac{-1}{9}$ … $\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$ … $+\infty$
$\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\lambda$ معامل S_5	−	+	+
$\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\lambda$ معامل S_4	+	+	−
	في هذا الجزء من المجال معامل S_5 سالب، فيدخل S_5 ويخرج S_1	في هذا الجزء من المجال لا يوجد أي معامل سالب: الحل الأمثل السابق يعتبر حلا أمثلا هنا أيضا.	في هذا الجزء من المجال معامل S_4 سالب، فيدخل S_4 ويخرج S_3

الحالة الأولى: حالة المجال($-1 \le \lambda < \frac{-1}{9}$)

في هذه الحالة وكما رأينا أعلاه يدخل إلى قاعدة الحل (S_5) ويخرج (S_1)، فنحصل على الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	$\frac{-1}{2} - 4{,}5\lambda$	$3 - 9\lambda$	0	$1{,}5 - 1{,}5\lambda$	0	$11125 + 1125\lambda$
X_1	1	0	0	1	0	0	0	0	1000
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	1,5	3	1	$\frac{-1}{2}$	0	1125
X_3	0	0	1	-1,5	-3	0	$\frac{1}{2}$	0	375
S_5	0	0	0	2	4	0	-1	1	1250

بعد تحليل قيم معاملات (S_1)، (S_2)، (S_4)، نلاحظ أنها كلها موجبة في مجال تغير (λ) الحالي. وبالتالي فهذا الجدول يمثل حلا أمثلا في هذا الجزء من مجال تغير (λ).

الحالة الثانية: حالة المجال ($\frac{-1}{9} \le \lambda < \frac{5}{3}$)

في هذا الجزء من المجال لا يوجد أي معامل سالب، لذلك فالحل الأمثل السابق يعتبر حلا أمثلا هنا أيضا.

الحالة الثالثة: حالة المجال $(\lambda > \frac{5}{3})$

في هذا الجزء من المجال، الحل المحصل عليه ليس حلا أمثلا، وبالتالي فإنه يجب إدخال المتغير S_4 وإخراج S_3، فينتج لنا الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	0	4	$-5+3\lambda$	0	4	$10500+4500\lambda$
X_1	1	0	0	0	-2	-2	0	1	0
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_4	0	0	0	0	0	4	1	-3	750
X_3	0	0	1	0	0	1	0	0	1500
S_1	0	0	0	1	2	2	0	-1	1000

هذا الجدول يمثل حلا أمثلا في هذا الجزء من مجال تغير (λ)، نظرا لأن كل معاملات دالة الهدف موجبة أو صفر.

ملخص عام للحلول المثلى نتيجة لتغير (C_3):

λ	-1 $\quad$ $\frac{-1}{9}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
C_3	0	$\frac{8}{3}$ $\quad$ 8	$+\infty$
X_1	1000	375	1000
X_2	500	500	500
X_3	375	1312,5	375
S_1	0	625	0
S_2	0	0	0
S_3	1125	187,5	1125
S_4	0	0	0
S_5	1250	0	1250
Z_{max}	$11125+1125\lambda$	$11437,5+3937,5\lambda$	$10500+4500\lambda$
	10000	11000	18000



رسم شكل رقم 7

المرحلة الثالثة: تغيير كل الهوامش مع بعض:

يمكننا الآن الانتقال إلى مرحلة تغيير كل هوامش الربح للمؤسسة المذكورة مع بعض، ونحاول حصر تأثير هذا التغيير على القيمة المثلى لدالة الهدف (دالة الربح للمؤسسة المذكورة).

ننطلق هنا أيضا من الحل الأمثل للنموذج الخطي الخاص بنشاط المؤسسة المعنية، عندما كانت هوامش الربح محددة، ونفترض أن معاملات متغيرات دالة

الهدف (هوامش الربح) تأخذ كلها قيما غير محددة، يمكن التعبير عنها من خلال الوسيط (λ) كالتالي:

$$C_1 = 4\,(1+\lambda)\,, C_2 = 12\,(1+\lambda)\;,\; C_3 = 3\,(1+\lambda)$$

من أجل الحصول على حل أمثل جديد معدل، نأخذ بعين الاعتبار قيم (C_j) الجديدة (غير المحددة) مع بعض، ونحسب قيم (Δ_j) وذلك بإضافة عمود (C_i) وصف (C_j) إلى جدول الحل الأمثل السابق (الحل الأمثل في حالة ثبات هوامش الربح).

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
C_i	Z	0	0	0	0	4	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	11437,5
$4+4\lambda$	X_1	1	0	0	0	-2	0	0,5	$\frac{-1}{2}$	375
$12+12\lambda$	X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
0	S_3	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	187,5
$3+3\lambda$	X_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1312,5
0	S_1	0	0	0	1	2	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	625
	C_j	$4+4\lambda$	$12+12\lambda$	$3+3\lambda$	0	0	0	0	0	

$$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1}\,.\,C_i = 4(1+\lambda) - [1 \times 4(1+\lambda) + 0]$$
$$= 4 - [4] = 0$$
$$\Delta_1 = 0$$

$\Delta_2 = 12(1+\lambda) - [0 + 12(1+\lambda) + 0]$

$\Delta_2 = 12(1+\lambda) - [12(1+\lambda)] = 0$

$\Delta_2 = 0$

$\Delta_3 = 3(1+\lambda) - [0 + 3(1+\lambda) + 0] = 0$

$\Delta_3 = 0$

$\Delta_4 = 0$

$\Delta_5 = 0 - [-2(4) \times (1+\lambda) + 12 \times 1 \times (1+\lambda) \times 1 + 0 + 0]$

$= -4 - 4\lambda$

$\Delta_5 = -4 - 4\lambda$

$\Delta_6 = 0$

$\Delta_7 = 0 - [0{,}5 \times (4) \times (1+\lambda) - 0{,}25 \times 3 \times (1+\lambda)]$

$\Delta_7 = -\frac{5}{4} - \frac{5}{4}\lambda$

$\Delta_8 = 0 - [-0{,}5 \times 4 \times (1+\lambda) + \frac{3}{4} \times 3 \times (1+\lambda)]$

$\Delta_8 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\lambda$

بعد ضرب قيم (Δ_j) في (1-) وتعويضها بقيم (C_j) في الجدول السابق نحصل على الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	Sol
Z	0	0	0	0	$4+4\lambda$	0	$\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\lambda$	$\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{4}$	11437.5
X_1	1	0	0	0	-2	0	0,5	$\frac{-1}{2}$	375
X_2	0	1	0	0	1	0	0	0	500
S_3	0	0	0	0	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	187,5
X_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1312,5
S_1	0	0	0	1	2	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	625

لا نستطيع تحديد طبيعة هذا الجدول هل هو يشكل حلا أمثلا أم لا، وذلك نظرا لأن معاملات (S_2)، (S_4) و (S_5) هي قيم غير محددة.

فنضع جدولا ندرس من خلاله تغيرات هذه المعاملات حسب القيم التي تأخذها (λ).

λ	-1 $\quad$ $+\infty$
$4+4\lambda$ معامل S_2	+
$\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\lambda$ معامل S_4	+
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\lambda$ معامل S_5	+
	كل معاملات دالة الهدف موجبة في مجال تغير λ، وبالتالي فالحل المحصل عليه هو حل أمثل

إذن فالحل الأمثل المحصل عليه يساوي ($Z_{max}=11437{,}5+11437{,}5\lambda$) وهو يعتمد فقط على قيمة (λ).

ونحن نعرف أن الوسيط (λ) يعبر عن العوامل المختلفة التي يمكن أن تؤثر على هوامش الربح في السوق، فكلما تغيرت هذه العوامل بنسبة مقدارها (λ) معينة كلما أدى ذلك إلى تغير قيمة الربح الأقصى الممكن الحصول عليه إلى قيمة مناسبة لهذا المستوى من التغير في الوسيط

مثال رقم 2.

ليكن النموذج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 430$$

$3X_1 + 2X_3 \leq 460$

$X_1 + 4X_2 \leq 420$

$Xj \geq 0$

المطلوب: حل هذا النموذج الخطي في الحالتين التاليتين:

1 – في حالة ما إذا كانت معاملات دالة الهدف ثابتة وقيمها كالتالي: $C_3 = 5, C_2 = 2, C_1 = 3$

2 – في حالة تغير معاملات دالة الهدف حسب الصيغة التالية:

$C_3 = 5 + 5\lambda, C_2 = 2 + 2\lambda, C_1 = 3 + 3\lambda$.

الحل:

أولا – حل النموذج الخطي في حالة ثبات معاملات دالة الهدف.

أعظم قيمة لدالة الهدف يمكن الحصول عليها في حدود القيود الفنية المعطاة نحصل عليها من خلال الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	1	2	0	1350
X_2	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	100
X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	2 -	1	1	20

ثانيا– الحل في حالة تغير معاملات دالة الهدف:

1 – تحديد المجال الذي يمكن أن تتغير فيه معاملات دالة الهدف (C_j) بدون أن تتغير قيمة الحل الأمثل (X_j^*).

- بالنسبة لمعامل X_1 وهو(C_1):

نلاحظ أن X_1 لا يظهر في قاعدة الحل الأمثل، لذلك فالمجال الذي يتغير فيه معاملاه (C_1) يساوي:

$$[Y_1 + 3Y_2 + Y_2 - C_1] = 1 + 2(3) + 0 - 3 = 4$$

$0 < \Delta C_1 < 4$، مما يعني أن: $0 < C_1 < 4+3$، أي : $0 < C_1 < 7$. وهذا هو المجال الذي يمكن أن يتغير فيه (C_1) بدون أن يؤدي إلى تغيير قيمة الحل الأمثل.

- بالنسبة لمعامل X_2 وهو (C_2):

بينما X_2 فهو يشكل جزءا من قاعدة الحل، وبالتالي فالمجال الذي يمكن أن يتغير فيه معامله (C_2) بدون أن يؤدي إلى تغيير قيمة الحل الأمثل يتحدد كالتالي:

$$8 = (\tfrac{-1}{4}) \div 2 - \text{،} \; 2- = \tfrac{1}{2} \div 1 - \text{،} \; 16 = (\tfrac{-1}{4}) \div (4 -)$$

أصغر قيمة موجبة هي 8 وأكبر قيمة سالبة هي- 2، فيكون مجال تغير (C_2) الذي لا يؤدي إلى تغير قيمة الحل الأمثل هو:

$-2 < \Delta C_2 < 8$، أي: $-2+2 < C_2 < 8 + 2$، فنحصل على المجال المطلوب: $0 < C_2 < 10$.

– أما في ما يخص معامل X_3 وهو ($C3$): فمجال تغيره الذي لا يترتب عليه تغيير قيمة الحل الأمثل فهو: $\frac{7}{3} < C_3 < \infty$

2 - تغيير قيم معاملات دالة الهدف (C_J) التي تؤدي إلى تغيير قيم الحل الأمثل:

أ – تغيير (C_1) معامل X_1:

نبحث أولا عن الحلول المثلى للنموذج المعطى عندما يتغير معامل X_1، مع تثبيت قيم المعاملات الأخرى (C_3 , C_2) بعد إضافة صف (C_J) وعمود (C_1) إلى

جدول الحل الأمثل المتحصل عليه في حالة ثبات معاملات دالة الهدف، نحصل على الجدول المعدل التالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
C_I	Z	0	0	0	1	2	0	1350
2	X_2	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	100
5	X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
0	S_3	2	0	0	2 -	1	1	20
	C_J	$3+3\lambda$	2	5	0	0	0	

نحسب الآن المعاملات الجديدة لدالة الهدف التي تمثل نتيجة المحاولة الأولى لتحسين دالة الهدف نتيجة تغيير (C_I).

$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} . C_i = 3(1+\lambda) - [\frac{-1}{4} \times 2 + 5 \times \frac{3}{2} + 2 \times 0]$

$= 3(1+\lambda) - [7] = -4 + 3\lambda$

$\Delta_1 = -4 + 3\lambda$

$\Delta_2 = 2 - [2 \times 1 + 5 \times 0 + 0]$

$\Delta_2 = 0$

$\Delta_3 = 5 - [2 \times 0 + 5 \times 1 + 0] = 0$

$\Delta_3 = 0$

$\Delta_4 = 0 - [2 \times 0,5 + 5 \times 0 + 0 \times -2] = -1$

$\Delta_4 = -1$

$\Delta_5 = 0 - [2 \times (\frac{-1}{4}) + 5 \times \frac{1}{2} + 0 \times 1] = -2$

$\Delta_5 = -2$

$\Delta_6 = 0$

ننقل الآن هذه القيم إلى الجدول السابق ونحسب قيمة Z_{max} الجديدة.

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	$4 - 3\lambda$	0	0	1	2	0	1350
X_2	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	100
X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	2 -	1	1	20

كل معاملات دالة الهدف إما موجبة أو صفر ولا يوجد إلا معامل X_1 الذي هو غير محدد، لذلك لا نستطيع تأكيد إن كان هذا الجدول يمثل حلا أمثلا أم لا.

نضع جدولا ندرس من خلاله تغيرات هذا المعامل حسب القيم التي تأخذها(λ).

λ	-1 ... $\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$ ... $+\infty$
$4 - 3\lambda$ معامل X_1	+	−
	كل معاملات دالة الهدف موجبة في مجال تغير λ، وبالتالي فالحل المحصل عليه هو حل أمثل	في هذا الجزء من المجال ما زال معامل X_1 سالب، الحل المحصل عليه ليس أمثلا، ويدخل X_1 ويخرج S_3

حالة المجال ($\frac{4}{3} \leq \lambda < \infty$)

في هذه الحالة، وحسب الجدول أعلاه، يدخل X_1 ويخرج S_3، بعدها نحصل على جدول الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	$5 - 3\lambda$	$\frac{3\lambda}{2}$	$\frac{3\lambda}{2} - 2$	$1310 + 30\lambda$
X_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	102,5
X_3	0	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	215
X_1	1	0	0	1 -	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10

نلاحظ أن معاملات (S_2 ,S_1,S_3) كلها قيما غير محددة، لذلك يتطلب الأمر تكوين جدول لتحليل تغيرات قيم هذه المعاملات في مجال تغير λ، لنحدد هل الحل الجديد المحصل عليه أعلاه هو حل أمثل أم لا.

λ	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$ ∞
$\frac{3\lambda}{2}$ معامل S_2	+	+
$-2 + \frac{3\lambda}{2}$ معامل S_3	+	+
$5 - 3\lambda$ معامل S_1	+	−
	في هذا الجزء من المجال لا يوجد أي معامل سالب: الحل الأمثل السابق يبقى هو نفسه الحل الأمثل في هذا المجال	هنا معامل S_1 هو الوحيد السالب: فيدخل S_1 ويخرج X_3

بعد إدخال S_1 نحصل على جدول الحل التالي:

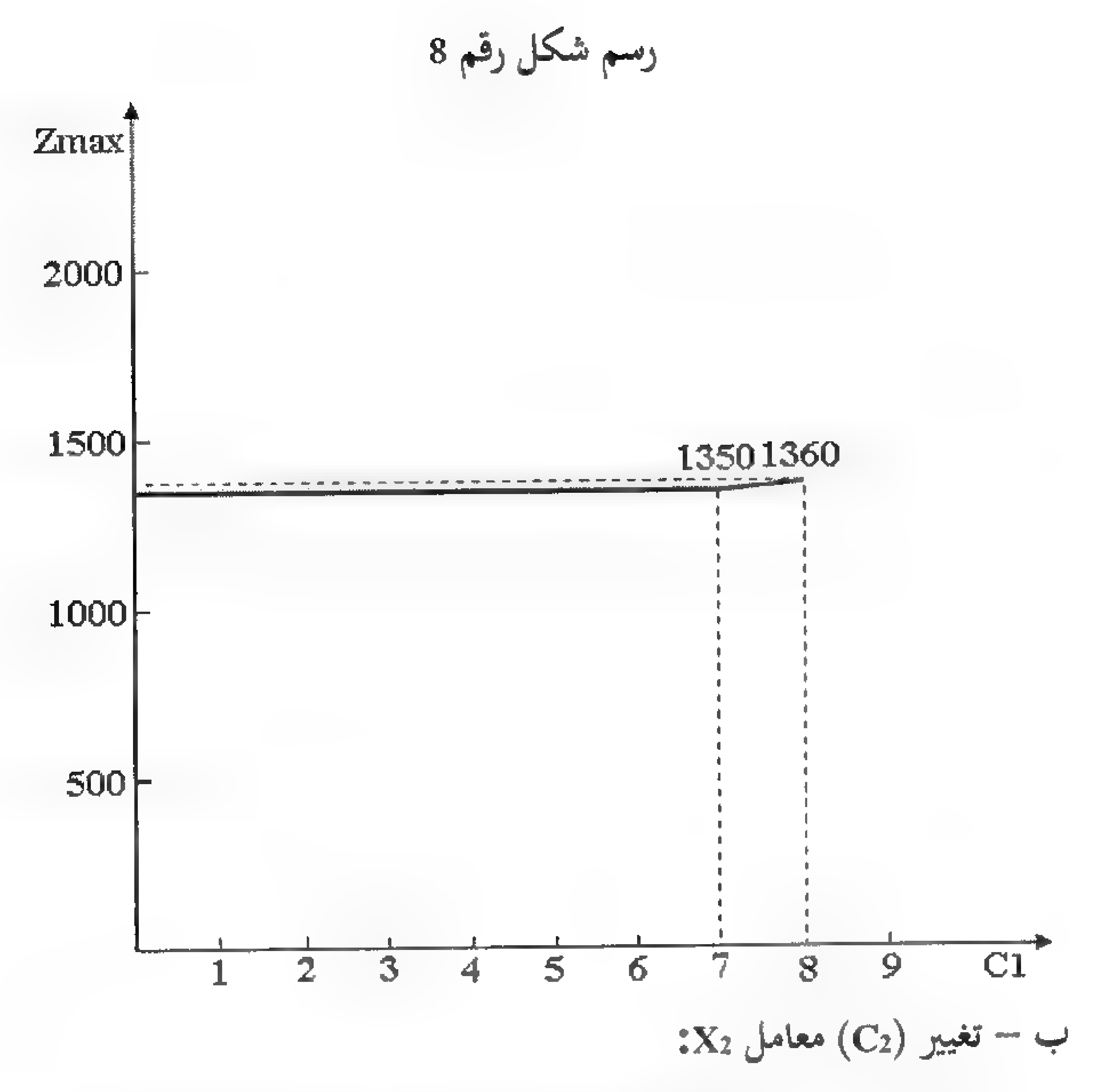
Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	$\frac{-10}{3}+2\lambda$	0	$5+\lambda$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1930}{3}+430\lambda$
X_2	0	1	0	0	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{200}{3}$
S_1	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{430}{3}$
X_1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{460}{3}$

هذا الجدول يشكل حلا أمثلا في مجال تغير λ الحالي، نظرا لأن كل قيم معاملات دالة الهدف أصبحت موجبة أو صفر.

بناءا على الدراسة السابقة، نعطي **ملخصا عاما لكل الحلول المثلى** للنموذج المعطى نتيجة لتغير (C_1). والجدول التالي يلخص هذه الحلول.

λ	-1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	∞
C_1	0	7	8	$+\infty$
X_1	0	10	$\frac{460}{3}$	
X_2	100	102.5	$\frac{200}{3}$	
X_3	230	215	0	
S_1	0	0	$\frac{430}{3}$	
S_2	0	0	0	
S_3	20	0	0	
Z_{max}	1350	$1310+30\lambda$	$\frac{1930}{3}+430\lambda$	
	1350	1350	1360	

رسم شكل رقم 8



ب – تغيير (C_2) معامل X_2:

نبحث عن الحل الأمثل عندما يتغير معامل (X_2) وهو (C_2) مع تثبيت معاملي (X_1,X_3).

معامل (X_2) يتغير في حدود: 0، ∞. أي أن: $0<C_2<\infty$، وبالتالي فإن: $0 < 2 + 2\lambda<\infty$ ومنه: $-1< \lambda<\infty$.

نضيف الصف (C_j) والعمود (C_i) إلى جدول الحل الأمثل السابق، المحصل عليه عندما كانت معاملات دالة الهدف ثابتة، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
C_i	Z	0	0	0	1	2	0	1350
$2+2\lambda$	X_2	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	100
5	X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
0	S_3	2	0	0	2 -	1	1	20
	C_J	3	$2+2\lambda$	5	0	0	0	

نحسب المعاملات الجديدة لدالة الهدف التي تمثل نتيجة المحاولة الأولى لتحسين قيمة دالة الهدف نتيجة تغير (C_2).

$$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} . C_i = 3 - [\frac{-1}{4}(2+2\lambda) + \frac{3}{2}(5) + 0\times(2)]$$

$$= 3 - [\frac{-1}{2} - \frac{-\lambda}{2} + 7{,}5 + 0] = -4 + \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta_1 = -4 + \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta_2 = (2+2\lambda) - [(2+2\lambda)\times 1 + 0 + 0] = 0$$

$$\Delta_2 = 0$$

$$\Delta_3 = 5 - [0 + 5 + 0] = 0$$

$$\Delta_3 = 0$$

$$\Delta_4 = 0 - [(2+2\lambda)\times 0{,}5 + 0 + 0] = -1 - \lambda$$

$$\Delta_4 = -1 - \lambda$$

$$\Delta_5 = 0 - [(2+2\lambda)\times(\frac{-1}{4}) + 5 \times \frac{1}{2}] = -2 + \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta_5 = -2 + \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta_6 = 0$$

بعد ضرب قيم معاملات دالة الهدف الجديدة (قيم Δ_j) في (1-) ننقلها إلى صف معاملات دالة الهدف في الجدول السابق، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	$4-\frac{\lambda}{2}$	0	0	$1+\lambda$	$2-\frac{\lambda}{2}$	0	$1350 + 200\lambda$
X_2	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	100
X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	2 -	1	1	20

هناك ثلاث معاملات قيمها غير محددة، وبالتالي لا نعرف هل هذا الجدول يمثل حلا أمثلا أم لا، لذلك نضع جدولا وندرس تغيرات قيم هذه المعاملات حسب القيم التي تأخذها (λ).

λ	-1 ... 4	4 ... 8	8 ... ∞
X_1 معامل $4-\frac{\lambda}{2}$	+	+	-
S_1 معامل $1+\lambda$	+	+	+
S_2 معامل $2-\frac{\lambda}{2}$	+	-	-
	في هذا الجزء من المجال لا يوجد أي معامل سالب: الحل الأمثل السابق يبقى هو نفسه الحل الأمثل في هذا المجال	الحل ليس أمثلا، يدخل S_2 ويخرج S_3	الحل ليس أمثلا، فيدخل S_2 ويخرج S_3

حالة المجال ($4 < \lambda \leq 8$)

في هذه الحالة يدخل المتغير (S_2) ويخرج (S_3)، فنحصل على الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	$\frac{\lambda}{2}$	0	0	5	0	$-2+\frac{\lambda}{2}$	$1310+210\lambda$
X_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	105
X_3	$\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	220
S_2	2	0	0	2 -	1	1	20

هل هذا الجدول يمثل حلا أمثلا؟

من أجل الإجابة على هذا السؤال نقوم بتحليل قيم معاملات (X_1, S_3) في مجال تغير (λ) الحالي، ونتأكد من أن هذين القيمتين موجبتين في هذا المجال.

فعلا توضح دراسة تغير هذين المعاملين أن قيمهما موجبة في مجال تغير (λ) الحالي، لذلك نعتبر أن الجدول المحصل عليه يمثل حلا أمثلا لهذا النموذج في المجال المشار إليه لتغير (λ).

حالة المجال ($\lambda > 8$):

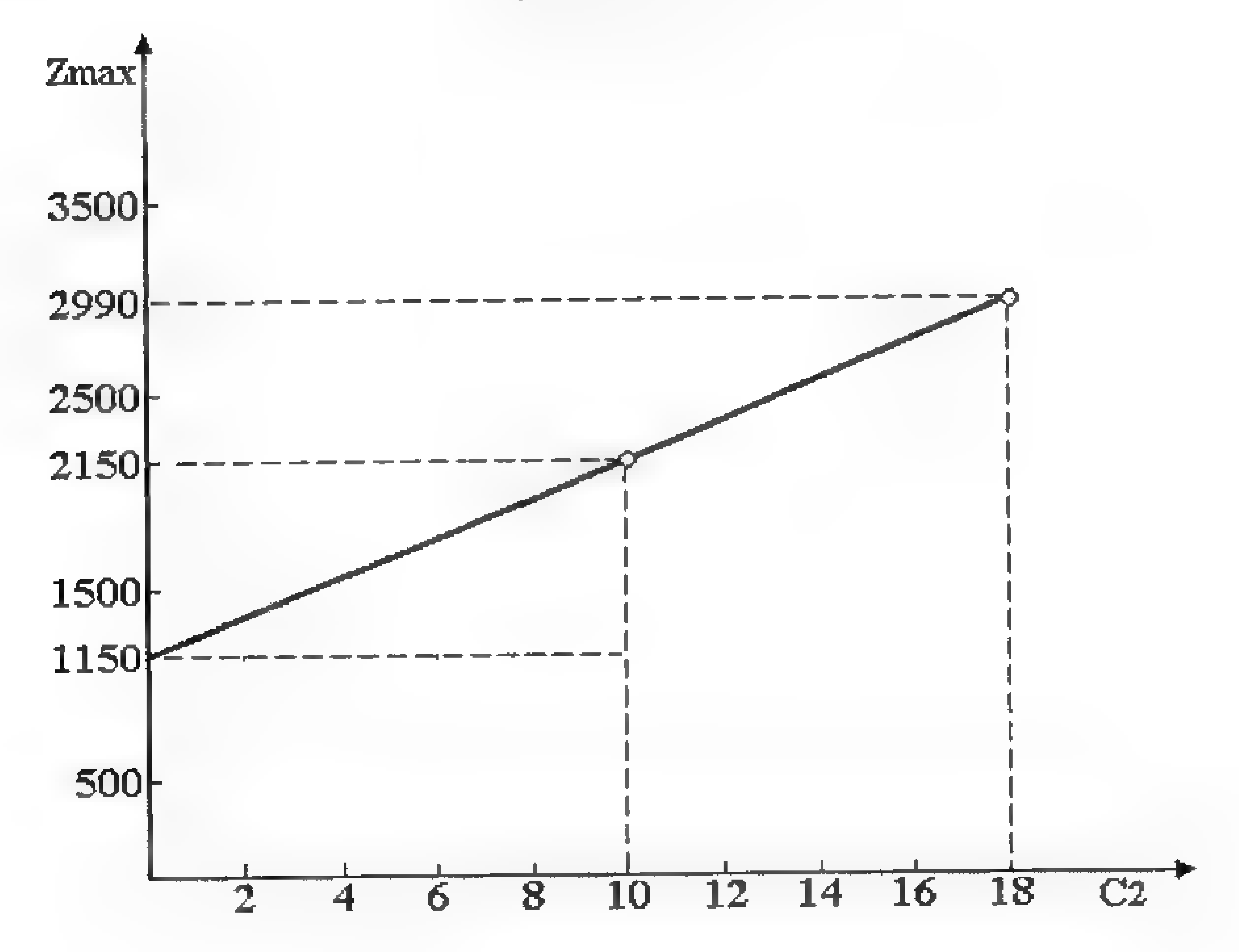
في هذه الحالة يدخل المتغير (S_2) ويخرج (S_3)، وهذا سوف يعطينا نفس الحل الأمثل السابق.

نعطي **ملخصا عاما لكل الحلول المثلى** للنموذج المعطى نتيجة لتغير (C_2). والجدول التالي يلخص هذه الحلول.

λ	−1	4	8	+∞
C_2	0	10	18	+∞
X_1	0	0	0	
X_2	105	105	105	
X_3	220	220	220	
S_1	0	0	0	
S_2	20	20	20	
S_3	0	0	0	
Z_{max}	$1150 + 200\lambda$	$210\lambda + 1310$	$1310 + 210\lambda$	

1150   2150   2990

رسم شكل رقم 9



ت – تغيير (C_3) معامل X_3:

نحاول أن نجد الآن الحل الأمثل عندما يتغير معامل (X_3) وهو (C_3) مع تثبيت معاملي (X_1,X_2).

معامل (X_3) يتغير في حدود: 0،∞. أي أن: $0<C_3<\infty$، وبالتالي فإن: $0<5+5\lambda<\infty$ ومنه: $-\infty$ -1<λ>، نضيف الصف (C_j) والعمود (C_i) إلى جدول الحل الأمثل السابق، المحصل عليه عندما كانت معاملات دالة الهدف ثابتة، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
C_i	Z	0	0	0	1	2	0	1350
2	X_2	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	100
$5+5\lambda$	X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
0	S_3	2	0	0	2 -	1	1	20
	C_J	3	2	$5+5\lambda$	0	0	0	

نحسب قيم (Δ_j) كالتالي:

$$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} . C_i = 3(1+\lambda) - [\frac{-1}{4} \times 2 + (5+5\lambda) \times \frac{3}{2} + 0]$$

$$= -4 \frac{15\lambda}{2}$$

$$\Delta_1 = -4 \frac{15\lambda}{2}$$

$$\Delta_2 = 2 - [2 + 0 + 0]$$

$$\Delta_2 = 0$$

$$\Delta_3 = 5+5\lambda - [0 + (5+5\lambda) \times 1 + 0] = 0$$

$$\Delta_3 = 0$$

$\Delta_4 = 0 - [2 \times 0,5 + 0 + 0 \times] = -1$

$\Delta_4 = -1$

$\Delta_5 = 0 - [2 \times (\frac{-1}{4}) + 0,5 \times (5 + 5\lambda) + 0] = -2 - \frac{5\lambda}{2}$

$\Delta_5 = -2 - \frac{5\lambda}{2}$

$\Delta_6 = 0$

بعد ضرب قيم معاملات دالة الهدف الجديدة (قيم Δ_j) في (-1) ننقلها إلى صف معاملات دالة الهدف في الجدول السابق، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	$4+\frac{15\lambda}{2}$	0	0	1	$2+\frac{5\lambda}{2}$	0	$1350+1150\lambda$
X_2	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	100
X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	2 -	1	1	20

نظرا لأن معاملات (X_1) و (S_2) غير محددة فنضع جدولا وندرس تغيرات معاملات هذين المتغيرين في مجال تغير (λ) الحالي:

λ	-1 … $\frac{-4}{5}$	$\frac{-4}{5}$ … $\frac{-8}{15}$	$\frac{-8}{15}$ … ∞
$4+\frac{15\lambda}{2}$ معامل X_1	-	-	+
$2+\frac{5\lambda}{2}$ معامل S_2	-	+	+
	الحل ليس أمثلا، فيدخل X_1 ويخرج S_3	الحل ليس أمثلا، يدخل X_1 ويخرج S_3	في هذا الجزء من المجال لا يوجد أي معامل سالب: الحل الأمثل السابق يبقى هو نفسه الحل الأمثل في هذا المجال

حالة المجال ($-1 < \lambda \leq \frac{-4}{5}$)

في هذه الحالة يدخل المتغير (X_1) ويخرج (S_3)، ونحصل على نتيجة الحل التالية:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	$5+\frac{15\lambda}{2}$	$-\frac{5\lambda}{4}$	$-2-\frac{15\lambda}{4}$	$1310+1075\lambda$
X_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	102,5
X_3	0	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	215
X_1	1	0	0	1 -	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10

معاملات(S_1)، (S_2) و(S_3) غير محددة فنضع جدولا وندرس تغيرات معاملات هذه المتغيرات في مجال تغير (λ) الحالي:

λ	-1 ... $\frac{-4}{5}$
$\frac{-5\lambda}{4}$ معامل S_2	+
$-2-\frac{15\lambda}{4}$ معامل S_3	+
$5+\frac{15\lambda}{2}$ معامل S_1	−
	الحل ليس أمثلا، يدخل S_1 ويخرج X_3

بعد إدخال (S_1) وإخراج (X_3)، نحصل على الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	$\frac{-10}{3} - 5\lambda$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1780}{3}$
X_2	0	1	$\frac{-1}{6}$	0	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{200}{3}$
S_1	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{430}{3}$
X_1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{460}{3}$

هذا الجدول يمثل حلا أمثلا في مجال تغير (λ) الحالي نظرا لأن كل معاملات دالة الهدف هي موجبة أو صفر.

حالة المجال: $(\frac{-4}{5} > \lambda \leq \frac{-8}{15})$

في هذه الحالة يدخل المتغير (X_1) ويخرج (S_3)، وهي حالة مشابهة للحالة السابقة وتعطينا جدول الحل الأمثل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	0	$5+\frac{15\lambda}{2}$	$-\frac{5\lambda}{4}$	$-2-\frac{15\lambda}{4}$	$1310 + 1075\lambda$
X_2	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	102,5
X_3	0	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-3}{4}$	215
X_1	1	0	0	1 -	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10

نظرا لأن معاملات(S_1)، (S_2) و (S_3) غير محددة فنضع جدولا وندرس تغيرات معاملات هذه المتغيرات في مجال تغير (λ) الحالي:

λ	$\frac{-4}{5}$ ... $\frac{-2}{3}$	$\frac{-2}{3}$ ... $\frac{-8}{18}$
$-\frac{5\lambda}{4}$ معامل S_2	+	+
$-2-\frac{15\lambda}{4}$ معامل S_3	+	+
$5+\frac{15\lambda}{2}$ معامل S_1	−	+
	الحل ليس أمثلا، فيدخل S_1 ويخرج X_3	في هذا الجزء من المجال لا يوجد أي معامل سالب: الحل الأمثل السابق يبقى هو نفسه الحل الأمثل في هذا المجال

حالة المجال : $(\frac{-4}{5} < \lambda \leq \frac{-2}{3})$

بعد دخول (S_1) وخروج (X_3)، نحصل على الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	$\frac{-10}{3} - 5\lambda$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1780}{3}$
X_2	0	1	$\frac{-1}{6}$	0	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{200}{3}$
S_1	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{430}{3}$
X_1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{460}{3}$

كل معاملات دالة الهدف موجبة أو صفر، وبالتالي فالحل يعتبر أمثلا.

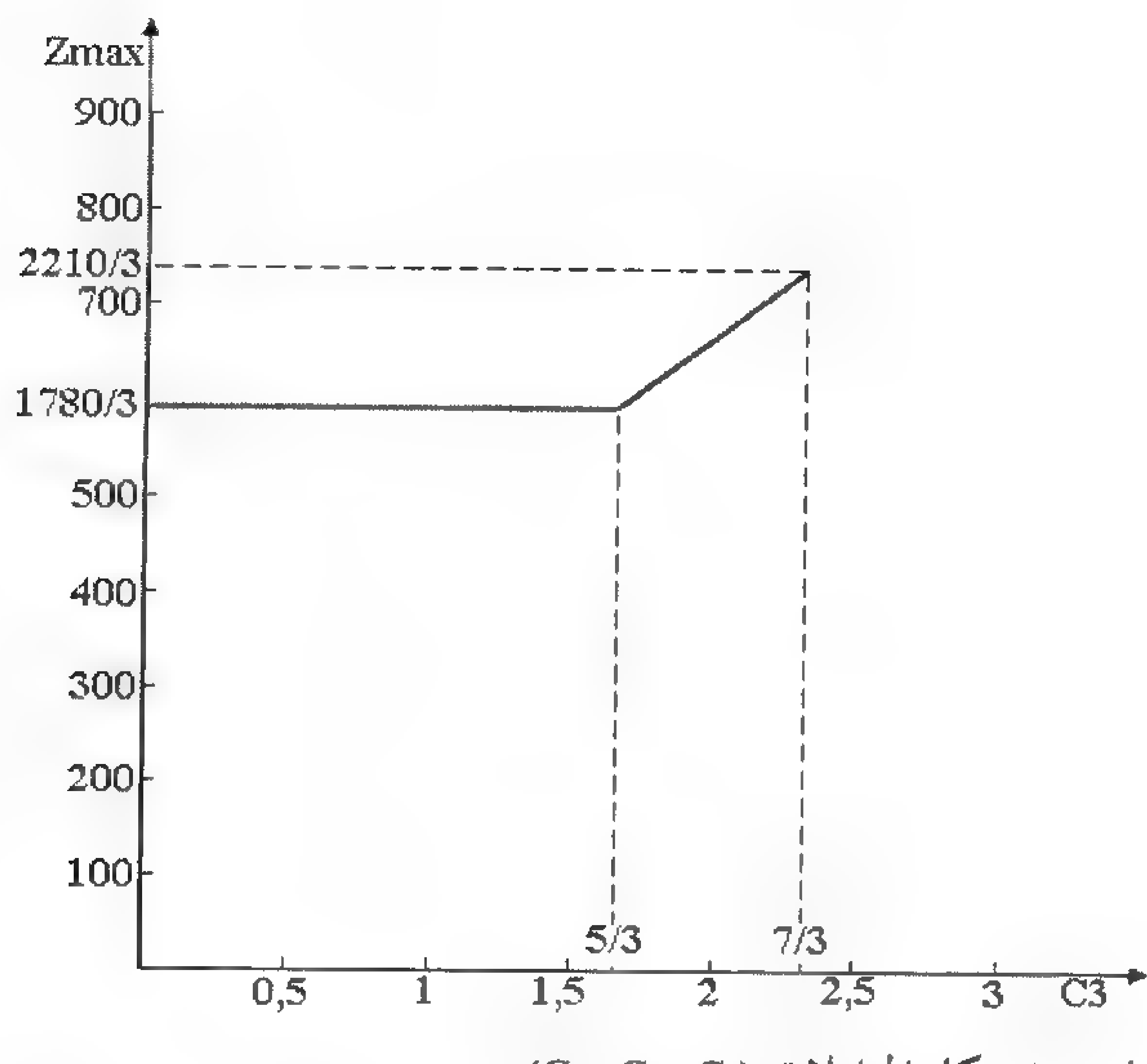
نعطي **ملخصا عاما لكل الحلول المثلى** للنموذج المعطى نتيجة لتغير (C_3).

والجدول التالي يلخص هذه الحلول.

λ	-1	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-8}{15}$	$+\infty$
C_3	0	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$+\infty$

X_1	$\frac{460}{3}$	$\frac{460}{3}$	10	0
X_2	$\frac{200}{3}$	$\frac{200}{3}$	102,5	100
X_3	0	0	215	230
S_1	$\frac{430}{3}$	$\frac{430}{3}$	0	0
S_2	0	0	0	0
S_3	0	0	0	0
Z_{max}	$\frac{1780}{3}$	$\frac{1780}{3}$	$1310+1075\lambda$	$1350+1150\lambda$
	$\frac{1780}{3}$	$\frac{1780}{3}$	$\frac{1780}{3}$	$\frac{2210}{3}$

رسم شكل رقم 10



ث – تغيير كل المعاملات (C_3 , C_2 , C_1):

نفترض أن معاملات متغيرات دالة الهدف قد تغيرت كلها مع بعض وأخذت كلها قيما غير محددة كالتالي:

$C_1 = 3 + 3\lambda$ ، $C_2 = 2 + 2\lambda$ ، $C_3 = 5 + 5\lambda$.

من أجل الحصول على حل أمثل للبرنامج الخطي في هذه الحالة، نأخذ بعين الاعتبار قيم (C_j) الجديدة مع بعض. ثم نحسب قيم Δ_j وذلك بإضافة صف C_i وعمود C_j إلى جدول الحل الأمثل السابق.

	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
C_i	Z	0	0	0	1	2	0	1350
$2+2\lambda$	X_2	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	100
$5+5\lambda$	X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
0	S_3	2	0	0	2 -	1	1	20
	C_J	$3+3\lambda$	$2+2\lambda$	$5+5\lambda$	0	0	0	

نحسب قيم (Δ_j) كالتالي:

$$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} \quad C_i = 3(1+\lambda) - [\frac{-1}{4}\times(2+2\lambda) + (5+5\lambda)\times \frac{3}{2}]$$
$$= -4-4\lambda$$

$\Delta_1 = = -4-4\lambda$

$\Delta_2 = 2+2\lambda - [(2+2\lambda)\times 1]$

$\Delta_2 = 0$

$\Delta_3 = 5+5\lambda - [(5+5\lambda)\times 1] = 0$

$\Delta_3 = 0$

$\Delta_4 = 0 - [(2+2\lambda)\times 0{,}5 + 0 - 0 \times 2] = -1-\lambda$

$\Delta_4 = -1-\lambda$

$\Delta_5 = 0 - [(2+2\lambda)\times(\frac{-1}{4}) + 0{,}5 \times (5+5\lambda)] = -2-2\lambda$

$\Delta_5 = -2-2\lambda$

$\Delta_6 = 0$

بعد ضرب قيم معاملات دالة الهدف الجديدة (قيم Δ_j) في (-1) ننقلها إلى

صف معاملات دالة الهدف في الجدول السابق، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	$4+4\lambda$	0	0	$1+\lambda$	$2+2\lambda$	0	$1350+1350\lambda$
X_2	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	100
X_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
S_3	2	0	0	-2	1	1	20

نظرا لأن معاملات (X_1, S_2, S_1) غير محددة القيمة، فإننا لا نستطيع معرفة طبيعة الحل المحصل عليه في الجدول السابق: هل هو يمثل حلا أمثلا أم لا لذلك نلجأ إلى تحليل تغير قيم هذه المعاملات في مجال تغير λ.

λ	-1 $\quad\quad\quad\quad$ ∞
معامل X_1 $4+4\lambda$	+
معامل S_1 $1+\lambda$	+
معامل S_2 $2+2\lambda$	+
	كل قيم معاملات دالة الهدف موجبة أو صفر في مجال تغيرλو بالتالي فالحل يعتبر أمثلا.

إذن الجدول السابق يمثل حلا أمثلا، وفي هذه الحالة فإن تغير القيمة المثلى لدالة الهدف، نتيجة لتغير معاملات دالة الهدف كلها مع بعض، يعتمد مباشرة على قيمة λ فقط.

المبحث الثاني

دراسة تأثير تغيير الطرف الأيمن للقيود الفنية

لقد اعتبرنا سابقا، في الحالة الستاتيكية، أن الطرف الأيمن للقيود الفنية (b_j) المعبر عن كمية الموارد المستعملة في النشاط، يبقى ثابتا. لكن هذا الاعتبار هو في الحقيقة غير متاح دائما نظرا لأن هذه الكميات تتغير باستمرار وذلك بتغير ظروف نشاط كل مؤسسة.

نعالج فيما يلي الحالة التي يمكن أن تتغير فيها هذه الكميات وتحديد الوضعيات المثلى للنشاط التي يمكن أن تصل إليها المؤسسة نتيجة تغير كميات الموارد المتاحة لديها، وذلك من خلال المثال الذي تناولناه في الحالة السابقة.

نحن نعرف أن أي نموذج رياضي خطي ابتدائي يوافقه دائما نموذج خطي آخر يسمى مرافق أو ثنائي لذلك فإن النموذج المرافق للنموذج الابتدائي الذي تعرضنا إليه سابقا يكون:

$$\mathbf{Min\ Z' = 100y_1 + 500y_2 + 1500y_3 + 6750y_4 + 4000y_5}$$

$$\mathbf{y_1 + 3y_4 + y_5 \geq 4}$$

$$\mathbf{y_2 + 6y_4 + 2y_5 \geq 12}$$

$$\mathbf{y_3 + 2y_4 + 2y_3 \geq 3}$$

$$\mathbf{y_j \geq 0}$$

إن الحل الأمثل لهذا النموذج الثنائي، الذي قيم معاملاته (C_i) و (b_i) هي قيم ثابتة ومحددة، يمكن استخراجه من جدول الحل الأمثل للنموذج الخطي الابتدائي الموافق له، وهو:

Z'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
Z'	-625	0	$\frac{-375}{2}$	0	0	-375	-500	$\frac{-2625}{2}$	375 - m	500 - m	1312,5	$11437,5 - \frac{57m}{2}$
y_4	0,5	0	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{5}{4}$
y_2	-2	1	0	0	0	2	-1	0	-2	1	0	4
y_5	-0,5	0	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

نفترض الآن أننا نريد تغيير أحد معاملات دالة الهدف لهذا النموذج الخطي الثنائي، والتي تعبر عن قيم الموارد المستعملة في النموذج الابتدائي، هذا المعامل هو مثلا (C_2)، وذلك بالصيغة التالية: $C_2 = 500 + 500\lambda$.

من أجل الحصول على حل أمثل للنموذج الخطي في هذه الحالة، نأخذ بعين الاعتبار قيمة (C_2) الجديدة وذلك بإضافة صف C_i وعمود C_j إلى جدول الحل الأمثل السابق ثم نكون جدولا جديدا كالتالي:

	Z'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
C_i	Z'	-625	0	$\frac{-375}{2}$	0	0	−375	-500	$\frac{-2625}{2}$	375 − m	500 − m	1312,5	11437,5 $\frac{-57m}{2}$
6750	y_4	0,5	0	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{5}{4}$
500 +500λ	y_2	−2	1	0	0	0	2	−1	0	−2	1	0	4
4000	y_5	-0,5	0	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
	C_j	1000	500+ 500λ	1500	6750	4000	0	0	0	m	m	M	

بعد حساب قيم Δ_j (معاملات دالة الهدف الجديدة) ونقلها إلى صف معاملات دالة الهدف نحصل على الجدول التالي:

Z'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
Z'	$-625 -1000\lambda$	0	$\frac{-375}{2}$	0	0	$-375 +1000\lambda$	$-500 -500\lambda$	$\frac{-2625}{2}$	$375- 1000\lambda- m$	$500+ 500\lambda- m$	$1312,5 - m$	$11437,5 + 2000\lambda$
y_4	0,5	0	$\frac{-1}{4}$	1	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{5}{4}$
y_2	−2	1	0	0	0	2	−1	0	−2	1	0	4
y_5	−0,5	0	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

نلاحظ من صف معاملات دالة الهدف أن قيم معاملات المتغيرات الاصطناعية (R_3 , R_2 , R_1) هي كلها سالبة وذلك بالنظر إلى القيمة (- m)، حيث أن (m) هي قيمة موجبة كبيرة جدا تقترب من (∞).

أما قيم معاملات (y_1 , S_2 , S_1) فهي قيم غير محددة الإشارة وبالتالي لا نعرف هل هي موجبة أو سالبة في مجال تغير (λ).

لذلك نضع جدولا وندرس فيه تغيرات قيم هذه المعاملات حسب القيم التي تأخذها (λ).

λ	-1 ... -0,625	-0,625 ... 0,375	0,375 ... ∞
$(-62-1000\lambda)$ معامل y_1	+	−	−
$(-375+1000\lambda)$ معامل S_1	−	−	+
$(-500\ -500\lambda)$ معامل S_1	−	−	−
	الحل ليس امثلا،فيدخل y_1 ويخرج y_4	كل معاملات دالة الهدف سالبة وبالتالي فالحل الأمثل السابق يبقى هو نفسه	الحل ليس امثلا ، فيدخل S_1 ويخرج y_5

الحالة الأولى: حالة المجال ($-0,625 > \lambda \geq -1$)

في هذه الحالة يدخل إلى قاعدة الحل المتغير (y_1) ويخرج المتغير (y_4)، ونحصل على النتيجة الممثلة في الجدول التالي:

Z'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
Z'	0	0	-500 -500λ	$1250+$ 2000λ	0	-1000	-500 -500λ	-1000 $+500\lambda$	1000 $-m$	$500+$ $500\lambda-m$	$1000-$ $500\lambda-m$	13000 $+4000\lambda$
y_1	1	0	$\frac{-1}{2}$	2	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{5}{2}$
y_2	0	1	-1	4	0	0	-1	1	0	1	0	9
y_5	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$

نلاحظ من هذا الجدول أن معاملات (y_4, y_3, S_2, S_3) هي قيم غير محددة، لكن بعد تحليل قيمها في مجال تغير (λ) الحالي نتأكد من أنها كلها سالبة، وبالتالي فالحل المحصل عليه يعتبر أمثلا.

الحالة الثانية: حالة المجال $(\lambda > 0,375)$

في هذه الحالة يدخل إلى قاعدة الحل المتغير (S_1) ويخرج المتغير (y_5)، ونحصل على النتيجة الممثلة في الجدول التالي:

Z'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
Z'	-1000	0	+375 -1500λ	0	750 -2000λ	0	-500- 500λ	-1875 +1500λ	- m	500 +500λ - m	1875- 1500λ -m	11625+ 1500λ
y_4	0	0	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
y_2	0	1	-3	0	-4	0	-1	3	0	1	-3	3
S_1	-1	0	$\frac{3}{2}$	0	2	1	0	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$

نجري الآن

نجري الآن دراسة لتغيرات معاملات المتغيرات (y_3, y_5, S_2, S_3) في مجال تغير (λ) نوردها في الجدول التالي:

λ	0,375 — 1,25	1,25 — ∞
$375-1500\lambda$ معامل y_3	–	–
$750-2000\lambda$ معامل y_5	–	–
$-500\ \ -500\lambda$ معامل S_2	–	–
$-1875+1500\lambda$ معامل S_3	–	+
	الحل الامثل السابق يبقى هو نفسه الحل الامثل	الحل ليس أمثلا، فيدخل S_3 ويخرج y_2

بعد دخول (S_3) وخروج (y_2) ، نحصل على الجدول التالي:

Z'	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	R_3	Sol
Z'	–1000	$625-500\lambda$	–1500	0	–1750	0	–1125	0	– m	$1125-m$	–m	13500
y_4	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{-1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	2
S_3	0	1	–3	0	0	0	$\frac{-1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	–1	1
S_1	–1	0	$\frac{3}{2}$	0	1	1	$\frac{-1}{2}$	0	–1	$\frac{1}{2}$	0	2

هذا الجدول يشكل حلا أمثلا للنموذج الثنائي في مجال تغير (λ) الحالي، وذلك لأن معامل (y_2) يشكل قيمة سالبة في هذا المجال.

نعطي الآن **ملخصا عاما لكل الحلول المثلى** للنموذج الثنائي المعطى نتيجة لتغير (C_2).

والجدول التالي يلخص هذه الحلول.

λ	-1	$-0,625$	$0,375$	$1,25$	$+\infty$
C_2	0	187,5	687,5	1125	$+\infty$

y_1	2,5	0	0	0
y_2	9	4	3	0
y_3	0	0	0	0
y_4	0	1,25	1, 5	2
y_5	1,5	0,25	0	0
S_1	0	0	0,5	2
S_2	0	0	0	0
S_3	0	0	0	1
Z_{max}	$13000 + 4500\lambda$	$11437,5 + 2000\lambda$	$11625 + 1500\lambda$	13500
	8500	10187,5	12187,5	13500

مثال 3:

تقوم مؤسسة صناعية بإنتاج منتجين استهلاكيين (B_2 ,B_1) باستعمال أربع مواد أولية، والنموذج الخطي المعبر عن نشاط هذه المؤسسة هو كالتالي:

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 8X_2 + X_3 + 2X_4$$

$$X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 5$$

$$2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 7$$

$$X_j \geq 0$$

حيث أن دالة الهدف هي دالة تكاليف شراء المواد الأولية الضرورية لتحقيق برنامج الإنتاج المذكور، وX_1, X_2, X_3, X_4 هي الكميات التي يتعين شراؤها من هذه المواد الأولية. أثمان شراء هذه المواد بالوحدات النقدية هي: $C_4 = 2$, $C_3 =$ 1 , $C_2 = 8$, $C_1 = 6$. أما الحد الأدنى من برنامج الإنتاج المطلوب تحقيقه فهو: b_1 $= 5$ و$b_2 = 7$ وحدات من المنتجين الأول والثاني على التوالي.

المطلوب: 1 - ما هي قيمة تكاليف الشراء الدنيا الممكن الوصول إليها من شراء المواد الأربعة بالأسعار الثابتة من أجل تحقيق برنامج الإنتاج المطلوب.

2 - ما هي قيمة تكاليف الشراء الدنيا الممكن الوصول إليها في حال تغير أثمان الشراء للمواد الأربعة بالنسب (2λ, 6λ , 8λ , λ) على التوالي.

3 -إذا تغير برنامج الإنتاج المطلوب بنسبة غير معروفة هي (5λ) بالنسبة للمنتج الأول (b_1)، وبنسبة (7λ) بالنسبة للمنتج الثاني (b_2)، ماهي قيم التكاليف الدنيا الممكن الوصول إليها في هذه الحالات.

الحل:

أولا– البحث عن قيمة تكاليف الشراء الدنيا الممكن الوصول إليها من شراء المواد الأربعة بالأسعار الثابتة من أجل تحقيق برنامج الإنتاج المطلوب.

نقوم بحل النموذج الخطي السابق الذي يعكس وضعية نشاط المؤسسة في الحالة الستاتيكية، فنحصل على الحل الأمثل لهذا النموذج في جدول السمبلكس التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	0	0	−3	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-10}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-10}{3} - m$	$\frac{4}{3} - m$	26 −10,5m
X_2	0	1	−1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
X_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3

أدنى قيمة لتكاليف شراء المواد التي يمكن الوصول إليها هي (26 و.ن.)، وذلك في حالة التعامل مع الأسعار الثابتة لهذه المواد.

ثانيا – البحث عن قيمة تكاليف الشراء الدنيا الممكن الوصول إليها في حال تغير أثمان الشراء للمواد الأربعة بالنسب ($\lambda 2\lambda$ 6 , 8λ , λ ,.) على التوالي.

1- تغيير (C_1) معامل X_1 (ثمن شراء المادة الأولى):

نحاول الآن أن نجد الحل الأمثل عندما يتغير معامل (X_1) وهو (C_1) مع تثبيت معاملات (X_2X_4 , X_3).

معامل (X_1) يتغير في حدود: 0،∞. أي أن: $0 < C_1 < \infty$، وبالتالي فإن:

$0< 6 + 6 \lambda <\infty$ ومنه : $-1 < \lambda < \infty$

نضيف الصف (C_j) والعمود (C_i) إلى جدول الحل الأمثل السابق، المحصل عليه عندما كانت معاملات دالة الهدف ثابتة، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
C_i	Z	0	0	-3	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-10}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-10}{3}$ -m	$\frac{4}{3}$ -m	26 - 10,5m
8	X_2	0	1	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
6 +6 λ	X_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3
	C_J	6+6 λ	8	1	2	0	0	m	m	

نحسب قيم (Δ_j) كالتالي:

$$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} . C_i = 0$$

$\Delta_1 = 0$ $\qquad$ $\Delta_5 = \frac{-10}{3} + 2\lambda$

$\Delta_2 = 0$ $\qquad$ $\Delta_6 = \frac{-4}{3} - 4\lambda$

$\Delta_3 = -3 + 6\lambda$ $\qquad$ $\Delta_7 = \frac{-10}{3} - 2\lambda - m$

$\Delta_4 = \frac{-2}{3} + 4\lambda$ $\qquad$ $\Delta_8 = \frac{4}{3} + 4\lambda - m$

$$Z_{min} = (6 + 6\lambda) . 3 + 8 .1 = 26 + 18\lambda$$

ننقل قيم (Δ_j) وهي قيم دالة الهدف الجديدة إلى الجدول السابق، فنحصل على الجدول التالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
C_i	Z	0	0	-3 $+6\lambda$	$\frac{-2}{3}$ $+4\lambda$	$\frac{-10}{3}$ $+2\lambda$	$\frac{-4}{3}$ -4λ	$\frac{-10}{3}$ -2λ $-m$	$\frac{4}{3}$ $+4\lambda$ $-m$	26 $+18\lambda$
8	X_2	0	1	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
6 $+6\lambda$	X_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3
	C_j	6 $+6\lambda$	8	1	2	0	0	m	m	

نظرا لأن معاملات (X_4, X_3, S_1, S_2) غير محددة القيمة، فإننا لا نستطيع معرفة طبيعة الحل المحصل عليه في الجدول السابق: هل هو يمثل حلا أمثلا أم لا لذلك نلجأ إلى تحليل تغير قيم هذه المعاملات في مجال تغير λ وهو (-1 , ∞).

λ	-1 … $\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$ … $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$ … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … $\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$ … ∞
$-3+4\lambda$ معامل X_3	-	-	-	+	+
$\frac{-2}{3}+4\lambda$ معامل X_4	-	-	+	+	+
$\frac{-10}{3}+2\lambda$ معامل S_1	-	-	-	-	+
$\frac{-4}{3}-4\lambda$ معامل S_2	+	-	-	-	-
	يدخل S_2 ويخرج X_2	الحل الأمثل السابق هو نفسه الحل الأمثل	يدخل X_4 ويخرج X_1	يدخل X_4 ويخرج X_1	يدخل X_3 ويخرج X_1

الحالة الأولى: حالة المجال ($-1 \leq \lambda < \frac{-1}{3}$)

في هذه الحالة وكما رأينا أعلاه يدخل إلى قاعدة الحل (S_2) ويخرج (X_2)، فنحصل على جدول الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	0	$4 + 12\lambda$	$-7 -6\lambda$	-2	$-6 -4\lambda$	0	$6+6\lambda -m$	$-m$	$30 +30\lambda$
S_2	0	3	-3	-1	-2	1	2	-1	3
X_1	1	2	-1	0	-1	0	1	0	5

كل معاملات دالة الهدف سالبة في مجال تغير (λ) الحالي، وبالتالي فالحل يعتبر أمثلا.

الحالة الثانية: حالة المجال ($\frac{-1}{3} \leq \lambda \leq \frac{1}{6}$)

في هذه الحالة الحل الأمثل السابق هو نفسه الحل الأمثل في هذا المجال.

الحالة الثالثة: حالة المجال ($\frac{1}{6} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$)

في هذه الحالة يدخل إلى قاعدة الحل المتغير (X_4) ويخرج (X_1)، فنحصل على جدول الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$1-6\lambda$	0	-2	0	-3	-2	3-m	2-m	29
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2,5
X_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	1	4,5

كل معاملات دالة الهدف سالبة في مجال تغير (λ) الحالي، وبالتالي فالحل يعتبر أمثلا في هذه الحالة.

الحالة الرابعة: حالة المجال ($\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{5}{3}$)

هنا يدخل إلى قاعدة الحل المتغير (X_4) ويخرج (X_1)، فنحصل على نفس جدول الحل الأمثل كما في المجال الثالث.

الحالة الخامسة: حالة المجال ($\lambda \geq \frac{5}{3}$)

يأتي هنا الدور للمتغير (X_3) للدخول إلى قاعدة الحل ويخرج المتغير (X_1)، فنحصل على النتيجة التالية:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$3-6\lambda$	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{-7}{3}$	$\frac{-10}{3}$	$\frac{7}{3}-m$	$\frac{10}{3}-m$	35
X_2	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
X_3	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3

لا زال الحل غير أمثل، فيدخل المتغير X_4 ويخرج X_3، ونحصل بعدها على الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$1-6\lambda$	0	-2	0	-3	-2	$3-m$	$2-m$	29
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	0	2,5
X_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	1	4,5

كل معاملات دالة الهدف سالبة أو صفر وبالتالي فالحل المحصل عليه هو حل أمثل.

ملخص الحلول المثلى لحالة تغير (C_1):

λ	-1 … $\frac{-1}{3}$	… $\frac{1}{6}$	… $+\infty$
C_1	0 … 4	… 7	… $+\infty$
X_1	5	3	0
X_2	0	1	2,5
X_3	0	0	0
X_4	0	0	4,5
S_1	0	0	0
S_2	3	0	0
Z_{min}	$30+30\lambda$	$26+18\lambda$	29
	0	20	29

2 - تغيير (C_2) معامل X_2 (ثمن شراء المادة الثانية):

نبحث في هذه الحالة عن الحلول المثلى عندما يتغير معامل (X_2) وهو (C_2) مع تثبيت معاملات (X_1, X_3, X_4).

معامل (X_2) يتغير في حدود: 0 ،∞. أي أن: $0<C_2<\infty$، وبالتالي فإن: $0< 8 + 8\lambda < \infty$ ومنه: $-1 < \lambda \infty$

نضيف الصف (C_j) والعمود (C_i) إلى جدول الحل الأمثل السابق، المحصل عليه عندما كانت معاملات دالة الهدف ثابتة، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
C_i	Z	0	0	-3	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-10}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-10}{3}$ -m	$\frac{4}{3}$ -m	26-10,5m
8+ 8λ	X_2	0	1	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
6	X_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3
	C_J	6+ 6λ	8	1	2	0	0	m	m	

نحسب قيم (Δ_j) ثم نضربها في (-1) كالتالي:

$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} . C_i = 0$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = 0$

$\Delta_3 = -3 -8\lambda$

$\Delta_4 = \frac{-2}{3} - \frac{8}{3}\lambda$

$\Delta_5 = \frac{-10}{3} \quad \frac{-16}{3}\lambda$

$\Delta_6 = \frac{-4}{3} + \frac{8}{3}\lambda$

$\Delta_7 = \frac{-10}{3} \frac{-16}{3}\lambda -m$

$\Delta_8 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3}\lambda -m$

$Z_{min} = (6 + 6\lambda) . 3 + 8 .1 = 26 + 8\lambda$

نتقل قيم (Δ_j) وهي قيم دالة الهدف الجديدة إلى جدول الحل الأمثل السابق، فنحصل على الجدول التالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
C_i	Z	0	0	$-3-8\lambda$	$\frac{-2}{3}\ \frac{-8}{3}\lambda$	$\frac{-10}{3}\ \frac{-16}{3}\lambda$	$\frac{-4}{3}+\frac{8}{3}\lambda$	$\frac{-10}{3}\ \frac{+16}{3}\lambda$ -m	$\frac{4}{3}\ \frac{-8}{3}\lambda$ -m	$26+8\lambda$
8	X_2	0	1	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
$6+6\lambda$	X_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3
	C_J	6	$8+8\lambda$	1	2	0	0	m	m	

نظرا لأن معاملات $(S_2, S_1 X_3, X_4)$ غير محددة القيمة، فإننا لا نستطيع معرفة طبيعة الحل المحصل عليه في الجدول السابق: هل هو يمثل حلا أمثلا أم لا. لذلك نلجأ إلى تحليل تغير قيم هذه المعاملات في مجال تغير λ وهو $(-1, \infty)$.

λ	-1 … $\frac{-5}{8}$	$\frac{-5}{8}$ … $\frac{-3}{8}$	$\frac{-3}{8}$ … $\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{4}$ … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … ∝
$-3-8\lambda$ معامل X_3	+	+	-	-	-
$\frac{-2}{3}\frac{-8}{3}\lambda$ معامل X_4	+	+	+	-	-
$\frac{-10}{3}-\frac{16}{3}\lambda$ معامل S_1	+	-	-	-	-
$\frac{-4}{3}+\frac{8}{3}\lambda$ معامل S_2	-	-	-	-	+
	يدخل X_3 ويخرج X_1	يدخل X_3 ويخرج X_1	يدخل X_4 ويخرج X_1	الحل السابق يعتبر حلا أمثلا	يدخل S_2 ويخرج X_2

الحالة الأولى: حالة المجال ($-1 \leq \lambda < \frac{-5}{8}$)

في هذه الحالة يدخل المتغير X_3 ويخرج المتغير X_1، فينتج الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$3+8\lambda$	0	0	$\frac{4}{3}+\frac{8}{3}\lambda$	$\frac{-7}{3}-\frac{8}{3}\lambda$	$\frac{-10}{3}-\frac{8}{3}\lambda$	-m	-m	$35+32\lambda$
X_2	1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
X_3	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3

ندرس تغيرات قيم معاملات (S_1)، (X_1)، (X_1)، (S_2)، في مجال تغير (λ) الحالي:

λ	-1 … $\frac{-7}{8}$	$\frac{-7}{8}$ … $\frac{-5}{8}$
$3+8\lambda$ معامل X_1	-	-
$\frac{4}{3}+\frac{8}{3}\lambda$ معامل X_4	-	-
$\frac{-7}{3}-\frac{8}{3}\lambda$ معامل S_1	+	-
$\frac{-10}{3}-\frac{8}{3}\lambda$ معامل S_2	-	-
	يدخل S_1 ويخرج X_3	الحل في الجدول السابق يعتبر حلا أمثلا

ندرس تغيرات قيم معاملات (X_1)، (X_4)، (S_1)، (S_2)، في مجال تغير (λ) الحالي.

بعد دخول S_1 وخروج X_3، نحصل على نتيجة الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$10 + 16\lambda$	0	$7 + 8\lambda$	$6 + 8\lambda$	0	$-8 - 8\lambda$	$-m$	$-m$	$56 + 56\lambda$
X_2	2	1	1	1	0	-1	0	1	7
S_1	3	0	3	2	1	-2	-1	2	9

كل معاملات دالة الهدف أصبحت سالبة أو صفر وبالتالي فهذا الجدول يوفر حلا أمثلا.

الحالة الثانية: حالة المجال ($\frac{-5}{8} < \lambda < \frac{-3}{8}$)

يدخل إلى قاعدة الحل في هذه الحالة المتغير (X_3) ويخرج منها (X_1)، فنحصل على جدول الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$3 + 8\lambda$	0	0	$\frac{4}{3} + \frac{8}{3}\lambda$	$\frac{-7}{3} \frac{-8}{3}\lambda$	$\frac{-10}{3} - \frac{8}{3}\lambda$	$-m$	$-m$	$35 + 32\lambda$
X_2	1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	-1	1	4
X_3	1	0	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3

نحدد قيم معاملات (S_2, S_1, X_4, X_1) في المجال الحالي لتغير λ.

λ	$\frac{-5}{8}$ — $\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$ — $\frac{-3}{8}$
$3 + 8\lambda$ معامل X_1	-	-
$\frac{4}{3} + \frac{8}{3}\lambda$ معامل X_4	-	+
$\frac{-7}{3} - \frac{-8}{3}\lambda$ معامل S_1	-	-
$\frac{-10}{3} \frac{-8}{3}\lambda$ معامل S_2	-	-
	الحل في الجدول أعلاه يمثل حلا أمثلا في هذا المجال	يدخل X_4 ويخرج X_3

هنا يدخل إلى قاعدة الحل المتغير X_4 ويخرج منها المتغير X_3، فنحصل على جدول الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$1 + 4\lambda$	0	$-2 - 4\lambda$	0	-3 $4\lambda -$	-2	$-m$	$-m$	$29+20\lambda$
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{5}{2}$
X_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{9}{2}$

كل معاملات دالة الهدف سالبة أو صفر وبالتالي فالحل أمثل.

الحالة الثالثة: حالة المجال ($\frac{-3}{8} < \lambda < \frac{-1}{4}$)

في هذه الحالة يدخل X_4 ويخرج X_1، مما ينتج عنه الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$+1$ 4λ	0	-2 -4λ	0	-3 -4λ	-2	$-m$	$-m$	$20+$ 20λ
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{5}{2}$
X_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{9}{2}$

وهو نفس الحل الأمثل المحصل عليه في حالة المجال السابق.

الحالة الرابعة: حالة المجال ($\frac{-1}{4} < \lambda \leq \frac{-1}{2}$)

الحل الأمثل المحصل عليه في الحالة الستاتيكية (حالة ثبات معاملات دالة الهدف) يعتبر هو نفسه الحل الأمثل في حالة هذا المجال.

الحالة الخامسة: حالة المجال ($\lambda > \frac{1}{2}$)

هنا يدخل S_2 في مكان X_2، فنحصل على نتيجة الحل التالية:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	0	$4-8\lambda$	-7	-2	-6	0	$-m$	$-m$	30
S_2	0	3	-3	-1	-2	1	$\frac{2}{3}$	-1	3
X_1	1	2	-1	0	-1	0	$\frac{-1}{3}$	1	5

وهو يعتبر حلا أمثلا في هذا المجال من مجالات تغير λ.

الملخص العام للحلول المثلى لحالة تغير (C_2):

λ	-1	$\frac{-7}{8}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
C_1	0	1	4	6	12	$+\infty$

X_1	0	0	0	3	5
X_2	7	3	2.5	1	0
X_3	0	4	0	0	0
X_4	0	0	4,5	0	0
S_1	9	0	0	0	0
S_2	0	0	0	0	3
Z_{min}	$56+56\lambda$	$35+32\lambda$	$29+20\lambda$	$26+8\lambda$	30
	0	7	19	24	30

3 – تغيير (C_3) معامل X_3 (ثمن شراء المادة الثالثة):

نحاول الآن أن نجد الحلول المثلى عندما يتغير معامل (X_3) وهو (C_3) مع تثبيت معاملات (X_1X_4,X_2,).

معامل (X_3) يتغير في حدود: 0، ∞. أي أن: $0 < C_3 < \infty$، وبالتالي فإن:

$0 < 1 + \lambda < \infty$ ومنه: $-1 < \lambda \leq \infty$.

نضيف الصف (C_j) والعمود (C_i) إلى جدول الحل الأمثل السابق، المحصل عليه عندما كانت معاملات دالة الهدف ثابتة، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
C_i	Z	0	0	-3	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-10}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-10}{3}$ -m	$\frac{-4}{3}$ -m	26 -10,5m
8	X_2	0	1	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
6	X_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3
	C_J	6	8	1+λ	2	0	0	m	m	

بعد حساب قيم (Δ_j) وضربها في (-1) نحصل على القيم التالية:

$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} . C_i = 0$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = 0$

$\Delta_3 = -3 - \lambda$

$\Delta_4 = \frac{-2}{3}$

$\Delta_5 = \frac{-10}{3}$

$\Delta_6 = \frac{-4}{3}$

$Z_{min} = (6 + 6\lambda) . 3 + 8 .1 = 26 + 18\lambda$

ننقل قيم (Δ_j)، وهي القيم الجديدة لدالة الهدف، إلى الجدول السابق فنحصل على الجدول التالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
C_i	Z	0	0	$-3-\lambda$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-10}{3}$	$\frac{-4}{3}$	-m	-m	26
8	X_2	0	1	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
$6+6\lambda$	X_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3
	C_J	$6+6\lambda$	8	1	2	0	0	m	m	

نظرا لأن معامل (X_3) غير محددة القيمة، فإننا لا نستطيع تحديد طبيعة الحل المحصل عليه في الجدول السابق: هل هو يمثل حلا أمثلا أم لا لذلك نلجأ إلى تحليل تغير قيمة هذا المعامل في مجـال تغير λ وهو (-1 , ∞).

λ	-1 $\qquad$ +∞
$-3-\lambda$ (معاملX_3)	-

نظرا لأن قيمة هذا المعامل سالبة في كل مجال تغير λ، فإن الحل المحصل عليه في حالة ثبات معاملات دالة الهدف يبقى نفسه هو الحل الأمثل في هذا المجال.

الملخص العام للحلول المثلى لحالة تغير (C_3):

λ	-1 $\qquad$ ∞
C_3	0 $\qquad$ ∞
X_1	3
X_2	0
X_3	0
X_4	0
S_1	0
S_2	0
Z_{min}	26

4- تغيير (C_4) معامل X_4 (ثمن شراء المادة الرابعة):

بقي لنا الآن أن نجد الحلول المثلى عندما يتغير معامل (X_4) وهو (C_4) مع تثبيت معاملات (X_3, X_2, X_1).

معامل (X_4) يتغير في حدود: 0، ∞. أي أن: $0 < C_4 < \infty$، وبالتالي فإن:

$0 < 2 + 2\lambda < \infty$ ومنه: $-1 < \lambda < \infty$

نضيف الصف (C_i) والعمود (C_j) إلى جدول الحل الأمثل السابق، المحصل عليه عندما كانت معاملات دالة الهدف ثابتة، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
C_i	Z	0	0	-3	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-10}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{-10}{3}$ -m	$\frac{-4}{3}$ -m	26 -10,5m
8	X_2	0	1	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
6	X_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3
	C_J	6	8	1	$2+2\lambda$	0	0	m	m	

بعد حساب قيم (Δ_j) وضربها في (-1) نحصل على القيم التالية:

$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} . C_i = 0$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = 0$ $\qquad \Delta_5 = \frac{-10}{3}$

$\Delta_3 = -3$ $\qquad \Delta_6 = \frac{-4}{3}$

$\Delta_4 = \frac{-2}{3} - 2\lambda$ $\qquad Z_{min} = 6.3 + 8.1 = 26$

نتقل قيم (Δ_j)، وهي القيم الجديدة لدالة الهدف، إلى الجدول السابق فنحصل على الجدول التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	0	0	-3	$\frac{-2}{3} - 2\lambda$	$\frac{-10}{3}$	$\frac{-4}{3}$	-m	-m	26
X_2	0	1	-1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
X_1	1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	3

نلاحظ أن معامل (X_4) غير محدد القيمة، لذلك فإننا لا نستطيع تحديد طبيعة الحل المحصل عليه في الجدول السابق: هل هو يمثل حلا أمثلا أم لا فنلجأ إلى تحليل تغير قيمة هذا المعامل في مجال تغير λ وهو ($-1, \infty$).

λ	-1	$\frac{-1}{3}$	∞
$\frac{-2}{3} - 2\lambda$ (معامل X_4)	−	+	

نظرا لأن قيمة هذا المعامل سالبة في المجال الأول لتغير λ، فإن الحل المحصل عليه سابقا في حالة ثبات معاملات دالة الهدف لا يمثل الآن حلا أمثلا، ويجب البحث عن حل أمثل جديد وذلك بإدخال المتغير X_4 وإخراج X_1 في هذا الجزء من المجال.

الحالة الأولى: حالة المجال $(-1 < \lambda \leq -\frac{1}{3})$

يدخل X_4ويخرج X_1 فنحصل على الحل التالي:

Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	R_1	R_2	Sol
Z	$1+3\lambda$	0	$-2+3\lambda$	0	$-3+\lambda$	$-2-2\lambda$	-m	-m	$29+9\lambda$
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
X_1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1-	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{9}{2}$

الحالة الثانية: حالة المجال $(\frac{-1}{3} < \lambda \leq \infty)$

في هذا المجال، الحلال الأمثل المحصل عليه سابقا في حالة ثبات معاملات دالة الهدف يمثل حلا أمثلا.

الملخص العام للحلول المثلى لحالة تغير (C_4):

λ	-1	$\frac{-1}{3}$	∞
C_3	0	$\frac{4}{3}$	∞
X_1 X_2 X_3 X_4 S_1 S_2			
Z_{min}	$29+9\lambda$		26
	20	26	

ثالثا: البحث عن قيم التكاليف الدنيا في حالة تغير برنامج الإنتاج:

من أجل دراسة تغير قيم التكاليف الدنيا لشراء المواد المستعملة في الإنتاج نتيجة لتغير برنامج الإنتاج، نلجأ إلى تكوين النموذج الثنائي للنموذج الابتدائي السابق، الذي يكون على الشكل التالي:

$\mathbf{Max\ Z' = 5y_1 + 7y_2}$

$\mathbf{y_1 + 2y_2 \leq 6}$

$\mathbf{2y_1 + y_2 \leq 8}$

$\mathbf{-y_1 + y_2 \leq 1}$

$\mathbf{y_2 \leq 2}$

$\mathbf{y_i \geq 0}$

نحل هذا النموذج الثنائي باستعمال طريقة السمبلكس فنحصل على الحل الأمثل الآتي:

Z	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Sol.
Z	0	0	3	1	0	0	26
S_3	0	0	-1	1	1	0	3
S_4	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
y_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
y_1	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$

1 – تغيير (b_1) معامل (y_1) وهي كمية الإنتاج من المنتج الأول:

نغير الآن كمية الإنتاج من المنتج الأول وندرس تأثير ذلك على مستوى تكاليف الشراء الدنيا للمواد المستعملة في الإنتاج.

ننطلق من جدول الحل الأمثل عندما كان حجم الإنتاج b_1 يساوي 5 وحدات، ثم نغيره بالشكل التالي ($5+5\lambda$)، لنتتبع تأثير هذا التغيير على مستوى تكاليف الشراء.

معامل (y_1) يتغير في حدود :0، ∞. أي أن: $0 < y_1 < \infty$، وبالتالي:

فإن: $0 < 5 + 5\lambda < \infty$ ومنه: $-1 < \lambda < \infty$.

نضيف الصف (C_j) والعمود (C_i) إلى جدول الحل الأمثل السابق، المحصل عليه عندما كانت معاملات دالة الهدف ثابتة، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

	Z'	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Sol
C_i	Z'	0	0	3	1	0	0	26
0	S_3	0	0	-1	1	1	0	3
0	S_4	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
7	y_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
$5+5\lambda$	y_1	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
	C_J	$5+5\lambda$	7	0	0	0	0	

بعد حساب قيم (Δ_j) وضربها في (1-) نحصل على القيم التالية:

$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} . C_i = 0$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = 0$ $\quad\quad\quad$ $\Delta_5 = 0$

$\Delta_3 = 3 - \frac{5\lambda}{3}$ $\quad\quad\quad$ $\Delta_6 = 0$

$\Delta_4 = 1 + \frac{10\lambda}{3}$ $\quad\quad\quad$ $Z_{min} = (5 + 5\lambda).3 + 8.1 = 26 + \frac{50\lambda}{3}$

ننقل قيم (Δ_j)، وهي القيم الجديدة لدالة الهدف، إلى الجدول السابق فنحصل على الجدول التالي:

	Z'	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Sol
C_i	Z'	0	0	$3-\frac{5\lambda}{3}$	$1+\frac{10\lambda}{3}$	0	0	$26+\frac{50\lambda}{3}$
0	S_3	0	0	-1	1	1	0	3
0	S_4	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
7	y_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
$5+5\lambda$	y_1	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
	C_j	$5+5\lambda$	7	0	0	0	0	

لا نعرف الآن هل أن هذا الجدول يمثل حلا أمثلا أم لا، وذلك لأن معاملات S_1 وS_2 هي غير محددة.

نضع الآن جدولا وندرس من خلاله تغيرات هذه المعاملات في مجال تغير λ $(-1, \infty)$.

λ	-1	$\frac{-3}{10}$	$\frac{9}{5}$	∞
$3-\frac{5\lambda}{3}$ معامل S_1	+	+	−	
معامل $1+\frac{10\lambda}{3}$ S_2	−	+	+	
	الحل ليس أمثلا، فيدخل S_2 ويخرج S_4	في هذا الجزء من المجال لا يوجد أي معامل سالب: الحل الأمثل السابق يبقى هو نفسه الحل الأمثل في هذا المجال	الحل ليس أمثلا، فيدخل S_1 ويخرج y_2	

الحالة الأولى: حالة المجال ($-1 \leq \lambda < \frac{-3}{10}$)

في هذه الحالة يدخل S_2 ويخرج S_4 فنحصل على الحل التالي:

Z'	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Sol
Z'	0	0	$5+5\lambda$	0	0	$-3-10\lambda$	$24+10\lambda$
S_3	0	0	1	0	1	-3	1
S_2	0	0	-2	1	0	3	2
y_2	0	1	0	0	0	1	2
y_1	1	0	1	1	0	-2	2

من أجل الحكم على هذا الحل هل هو حل أمثل أم لا، نحلل معاملات S_1,S_4 في مجال تغير λ الحالي، ويتضح أن قيم هذه المعاملات كلها موجبة في هذا المجال. فهذا الجدول إذن يشكل حلا أمثلا.

الحالة الثانية: حالة المجال $(\frac{-3}{10} \leq \lambda \leq \frac{9}{5})$

في هذه الحالة الحل الأمثل عندما كانت $b_1 = 5$ يبقى هو نفسه الحل الأمثل.

الحالة الثالثة: حالة المجال $(\lambda > \frac{9}{5})$

هنا يدخل S_1 ويخرج y_2 فنحصل على الحل المبين في الجدول التالي:

Z'	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Sol
Z'	0	$\frac{-9}{2}+\frac{5\lambda}{2}$	0	$\frac{5}{2}+\frac{5\lambda}{2}$	0	0	$20+20\lambda$
S_3	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
S_4	0	1	0	0	0	1	2
S_1	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{-1}{2}$	0	0	2
y_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4

هذا الجدول يعطي الحل الأمثل في هذه الحالة نظرا لأن معاملات y_2 و S_2 كلها موجبة.

ملخص الحلول المثلى لحالة تغير (b_1):

λ	-1	$\frac{-3}{10}$	$\frac{9}{5}$	$+\infty$
b_1	0	3,5	14	$+\infty$

y_1	2	3	0
y_2	2	1	2,5
S_1	0	0	0
S_2	2	0	4,5
S_3	1	0	0
S_4	0	0	0
Z'max	$24+10\lambda$	$26+\frac{50}{13}\lambda$	$20+20\lambda$
	14	21	56

2 – تغيير (b_2) معامل (y_2) وهي كمية الإنتاج من المنتج الثاني:

نغير الآن كمية الإنتاج من المنتج الثاني وندرس تأثير ذلك على مستوى تكاليف الشراء الدنيا للمواد المستعملة في الإنتاج.

ننطلق من جدول الحل الأمثل عندما كان حجم الإنتاج b_2 يساوي 7 وحدات، ثم نغيره بالشكل التالي: $(7\lambda + 7)$، لنتتبع تأثير هذا التغيير على مستوى تكاليف الشراء.

معامل (y_2) يتغير في حدود: 0،∞. أي أن: $0<y_2<\infty$، وبالتالي فإن: $0 < 7 + 7\lambda < \infty$ ومنه: $-1<\lambda<\infty$.

نضيف الصف (C_i) والعمود (C_j) إلى جدول الحل الأمثل السابق، المحصل عليه عندما كانت معاملات دالة الهدف ثابتة، فيصبح هذا الجدول كالتالي:

	Z'	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Sol
C_i	Z'	0	0	3	1	0	0	26
0	S_3	0	0	-1	1	1	0	3
0	S_4	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
$7+7\lambda$	y_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
5	y_1	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
	C_J	5	$7+7\lambda$	0	0	0	0	

نحسب قيم (Δ_j) ونضربها في (-1) فنحصل على القيم التالية:

$\Delta_1 = C_1 - \sum a_{i1} . C_i = 0$

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = 0 \qquad \Delta_5 = 0$

$\Delta_3 = 3 + \frac{14\lambda}{3} \qquad \Delta_6 = 0$

$\Delta_4 = 1 - \frac{7\lambda}{3} \qquad Z_{min} = (7 + 7\lambda).3 + 8.1 = 26 + \frac{28\lambda}{3}$

ننقل قيم (Δ_j)، وهي القيم الجديدة لدالة الهدف، إلى الجدول السابق فنحصل على الجدول التالي:

	Z'	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Sol
C_i	Z'	0	0	$3+\frac{14\lambda}{3}$	$1-\frac{7\lambda}{3}$	0	0	$26+\frac{28\lambda}{3}$
0	S_3	0	0	-1	1	1	0	3
0	S_4	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
$7+7\lambda$	y_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
5	y_1	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
	C_J	5	$7+7\lambda$	0	0	0	0	

لا نعرف هل أن هذا الجدول يشكل حلا أمثلا أم لا، لأن معاملات S_1، S_2 غير محددة.

نضع جدولا وندرس من خلاله تغيرات هذه المعاملات في مجال تغير λ $(-1,\infty)$.

λ	-1 ... $\frac{-9}{14}$	$\frac{-9}{14}$ ... $\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$ ... $+\infty$
معامل S_1 $3+\frac{14\lambda}{3}$	−	+	+
معامل S_2 $1-\frac{7\lambda}{3}$	+	+	−
	الحل ليس امثلا، فيدخل S_1 ويخرج y_2	في هذا الجزء من المجال لا يوجد أي معامل سالب: الحل الأمثل السابق يبقى هو نفسه الحل الأمثل في هذا المجال	الحل ليس امثلا، فيدخل S_2 ويخرج S_4

الحالة الأولى: حالة المجال ($-1 \leq \lambda < \frac{-9}{14}$)

في هذه الحالة يدخل S_1 ويخرج y_2 فنحصل على الحل التالي:

Z'	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Sol
Z'	0	$\frac{14\lambda}{3} - 7\lambda$	0	2,5	0	0	20
S_3	0	1,5	0	0,5	1	0	5
S_4	0	1	0	0	0	1	2
S_1	0	1,5	1	-2,5	0	0	2
y_1	1	0,5	0	0,5	0	0	4

من أجل الحكم على هذا الحل هل هو حل أمثل أم لا، نحلل معامل y_2 في مجال تغير λ الحالي، ويتضح أن قيمة هذا المعامل موجبة في هذا المجال. فهذا الجدول إذن يشكل حلا أمثلا.

الحالة الثانية: حالة المجال ($\frac{-9}{14} \leq \lambda \leq \frac{3}{7}$)

في هذه الحالة الحل الأمثل عندما كانت $b_2 = 7$ يبقى هو نفسه الحل الأمثل.

الحالة الثالثة: حالة المجال ($\lambda > \frac{3}{7}$)

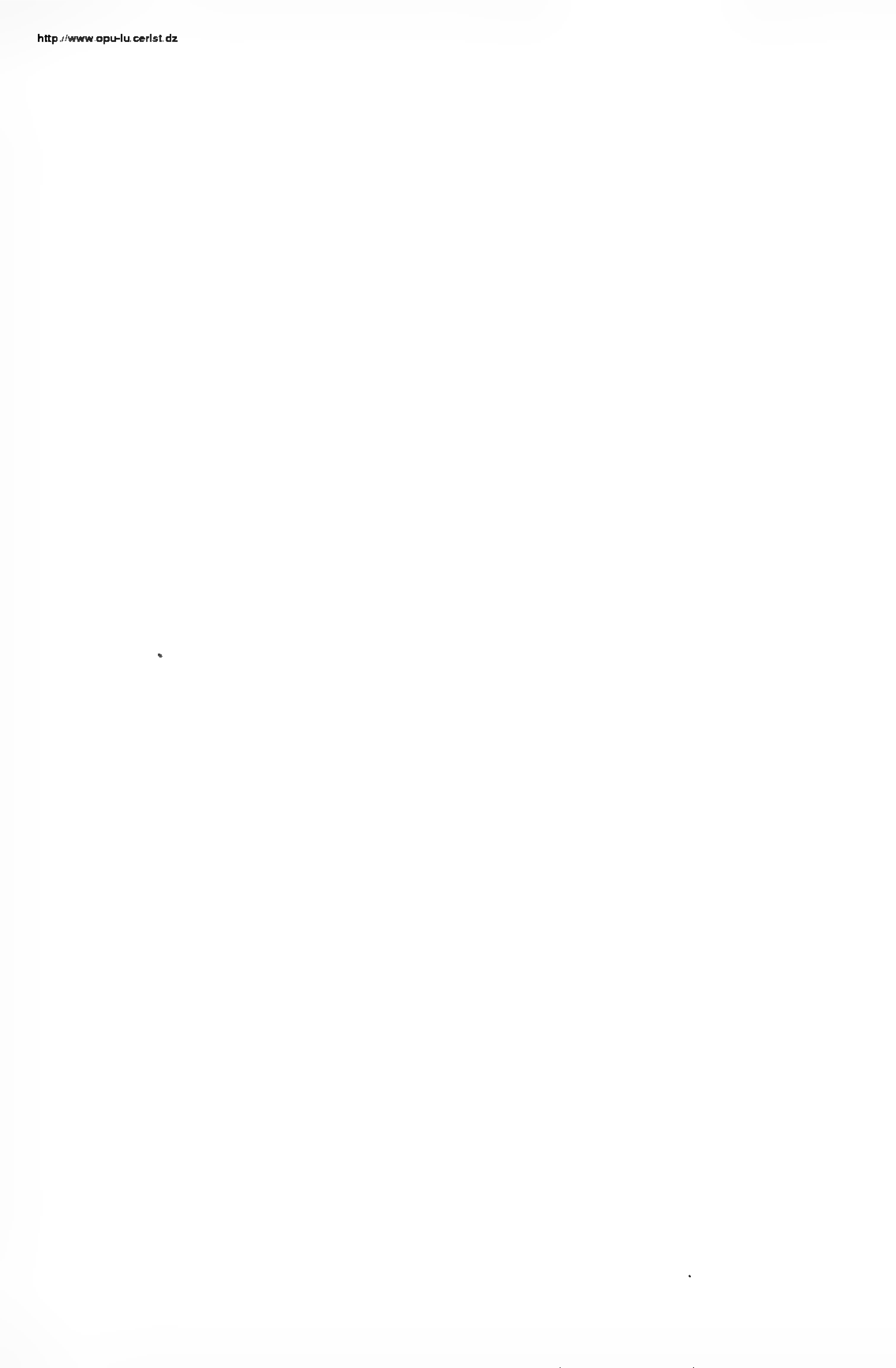
هنا يدخل المتغير S_2 ويخرج S_4 فنحصل على الحل التالي:

Z'	y_1	y_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Sol
Z'	0	0	5	0	0	$-3+7\lambda$	$24+14\lambda$
S_3	0	0	1	0	1	-3	1
S_2	0	0	-2	1	0	3	2
Y_2	0	1	0	0	0	1	2
y_1	1	0	1	0	0	-2	2

الآن كل معاملات دالة الهدف إما موجبة أو صفر، وبالتالي فهذا الجدول يعطي الحل الأمثل في هذا المجال.

ملخص الحلول المثلى لحالة تغير (b_2):

λ	-1 $\frac{-9}{14}$	$\frac{3}{7}$	$+\infty$
b_2	**0** **2,5**	**10**	$+\infty$
y_1	5	$\frac{10}{7}$	2
y_2	0	$\frac{4}{3}$	2
S_1	2	0	0
S_2	0	0	2
S_3	5	3	1
S_4	2	$\frac{2}{3}$	0
Z'max	20	$26+\frac{28}{3}\lambda$	$24+14\lambda$
	20	20	30


http://www.opu-lu.cerist.dz

الفصل الثالث

نموذج البرمجة الديناميكية

المبحث الأول

تذكير بأهم القواعد النظرية

I - أهم المفاهيم والقواعد.

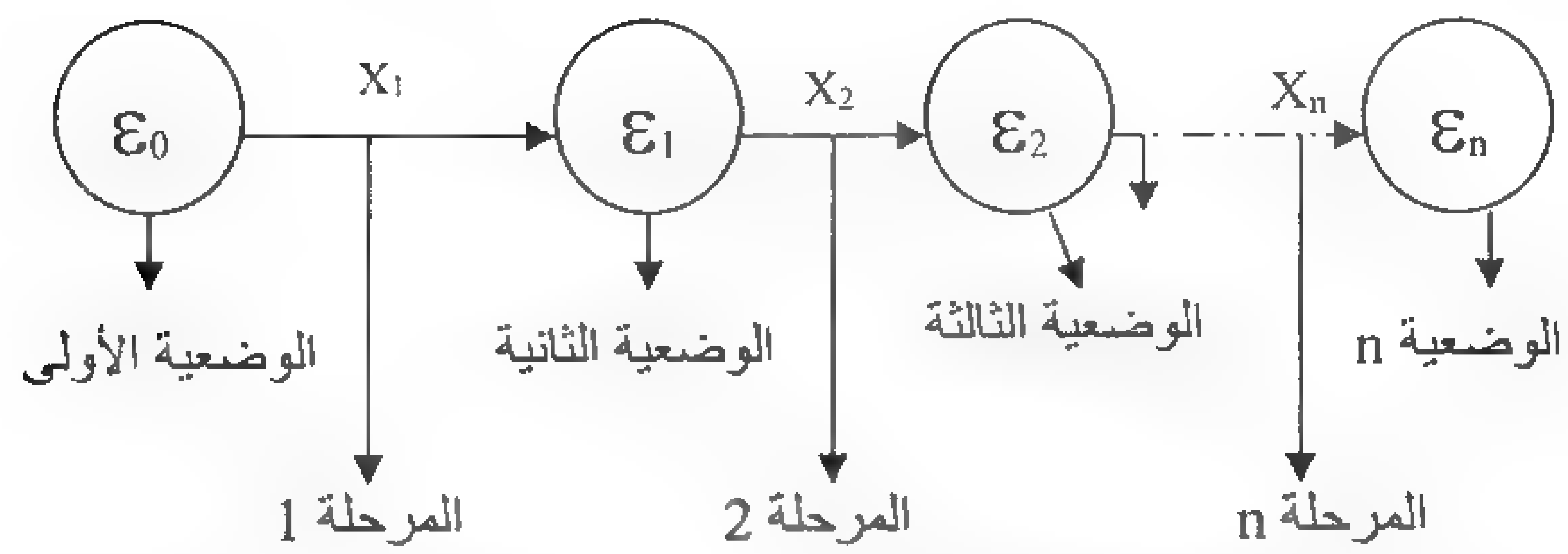
البرمجة الديناميكية هي طريقة تساعد على إيجاد الحل المثل للمسألة التي تقسم عملية اتخاذ القرار فيها إلى عدة مراحل (خطوات أو أجزاء) هذا النوع من المسائل يسمى بالمسائل الديناميكية أو متعددة المراحل (الخطوات). البرمجة الديناميكية هي جزء من البرمجة الرياضية، بدأ ظهورها في سنوات الخمسينات، ويرجع الفضل في تأسيسها إلى أعمال الاقتصادي الرياضي الأمريكي R.Bellman وزملاءه.

تستند هذه الطريقة إلى اعتبار أن الظاهرة المدروسة تتغير تحت تأثير العوامل المؤثرة فيها وتتحول من الوضعية الابتدائية لها (ε_0) إلى الوضعية النهائية (ε_n).

هذا يفترض أن عملية التحول يمكن تقسيمها أو تجزئتها إلى عدة خطوات أو مراحل عددها مثلا n.

نفترض أن ($\varepsilon_1,...\varepsilon_2,\varepsilon_n$)- هي الوضعيات المختلفة التي تأخذها الظاهرة المدروسة، بعد المراحل الأولى، الثانية، الثالثة،....حتى المرحلة n.

يمكن توضيح ذلك من خلال المخطط التالي:



إن عملية التحول المتتالي للظاهرة من وضعية إلى أخرى نسميه بالمرحلة (étape) والممثل على الرسم بالسهم الأفقي.

فالمرحلة الأولى هي عملية تحول الظاهرة من الوضعية الابتدائية (ε_0) إلى الوضعية الثانية (ε_1).

هذا التحول يتم تحت تأثير العوامل المؤثرة في الظاهرة، فإذا سمينا العنصر الأساسي المؤثر في الظاهرة بـ(x_i) مثلا فإننا نرمز لقيمة هذا العنصر خلال كل مرحلة بـ(x_k) (بحيث $k=1.2,\ldots,n$) ونسميه بمتغير المرحلة.

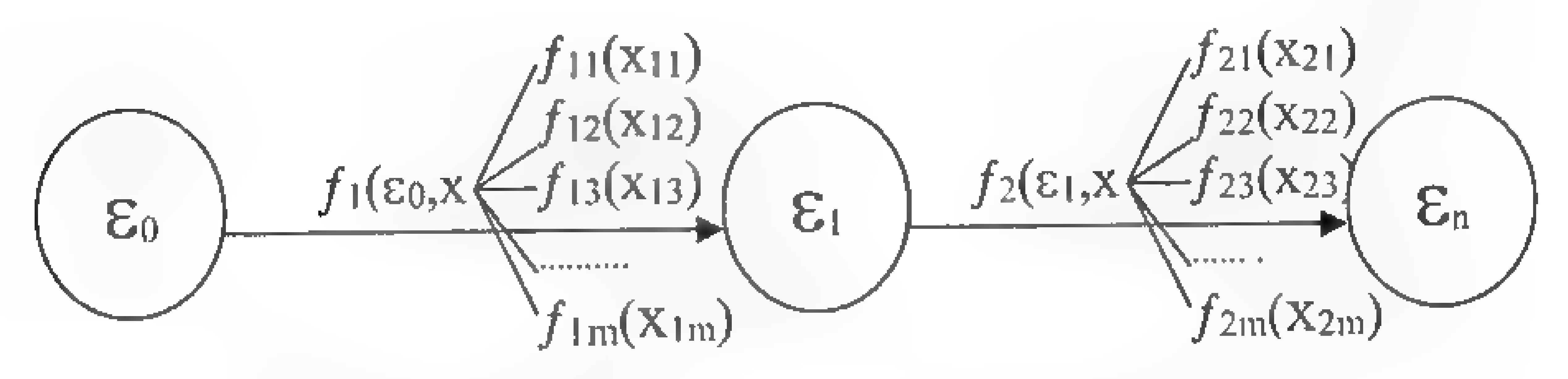
نسمي متغير الوضعية في نهاية كل مرحلة (k) بـ(ε_k) تعتمد قيمة متغير الوضعية (ε_k) على قيمة متغير الوضعية السابقة لها وهي (ε_{k-1}) وقيمة متغير هذه المرحلة (x_k)، هذه العلاقة يمكن التعبير عنها بالصيغة التالية:

$\varepsilon_K = h(\varepsilon_{K-1}, X_k)$ وتسمى هذه المعادلة بمعادلة الوضعية.

تنقسم دالة الهدف للمسألة ككل إلى دوال هدف جزئية خاصة بكل مرحلة، بمعنى تصبح لكل مرحلة من المراحل دالة هدفها التي يمكن التعبير عنها كالتالي:

$f_k = f(\varepsilon_{K-1}, X_k)$.

تأخذ (f_k) عدة قيم على حسب القيم التي يأخذها متغير المرحلة (x_k)، فكل قيمة يأخذها (x_k) تعطي لـ(f_k) قيمة مقابلة والحل الأمثل لهذه الدالة المرحلية يتمثل في اختيار أعظم أو أدنى قيمة لـ(f_k) من بين القيم السابقة. يمكن تمثيل ذلك كالتالي:



ثم نختار أعظم أو أدنى قيمة لـ(f_1) في المرحلة الأولى فتكون هي الحل الأمثل في هذه المرحلة.

يمكن أيضا أن نختار أعظم أو أدنى قيمة من بين قيم(f_2) وتكون هي الحل المثل للمرحلة الثانية.

II – حل مسألة البرمجة الديناميكية:

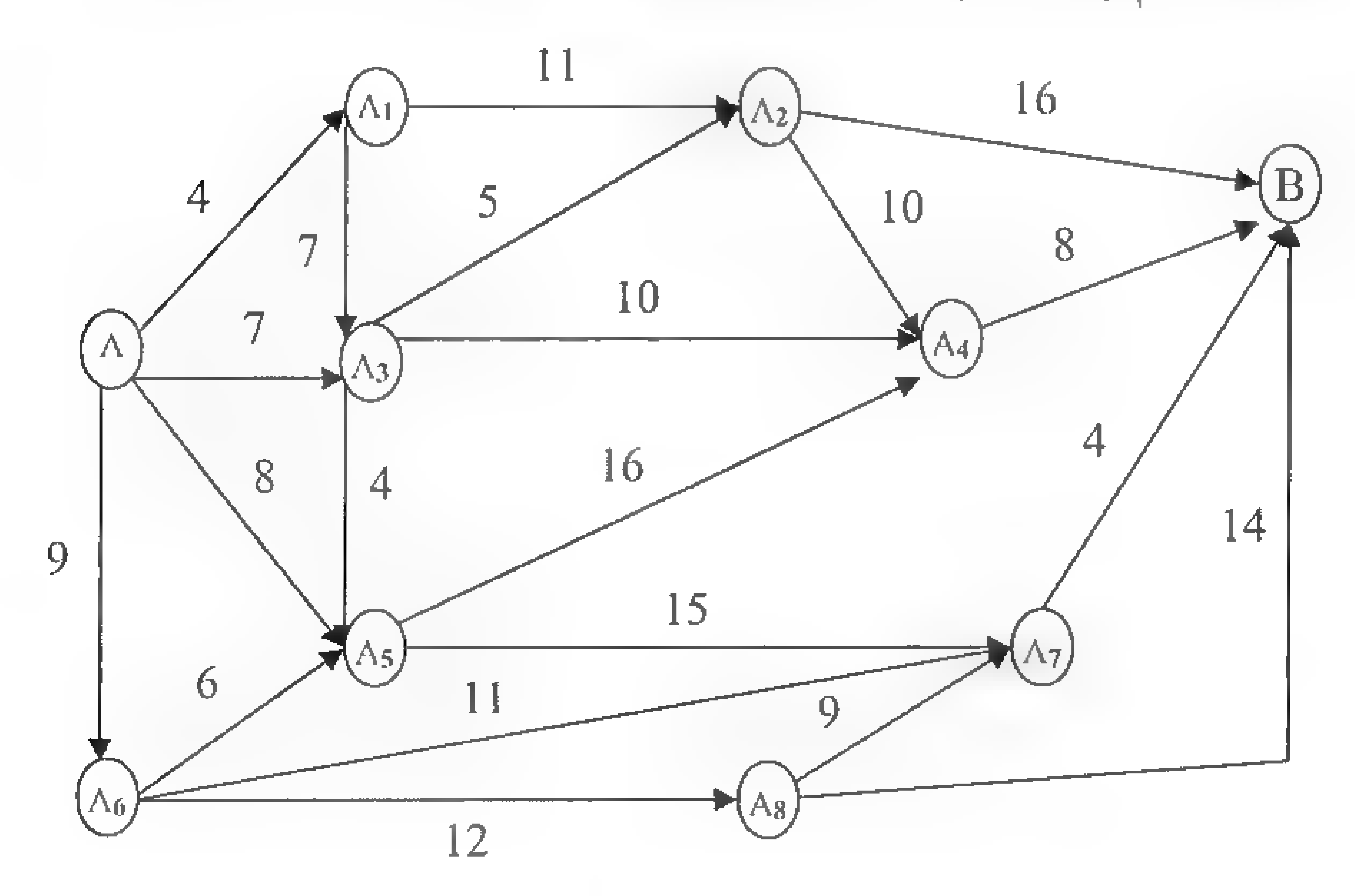
حل المسألة المطروحة يتمثل في إيجاد قيم متغيرات المرحلة وهي (x_k) التي تؤدي إلى إيجاد حل أمثل لدالة الهدف لهذه المسألة ككل، التصور البسيط الذي يمكن أن نهتدي إليه هو أن نجد الحل المثل لكل مرحلة (خطوة أو جزء) على حدة، ثم نجمع الحلول المثلى لكل هذه المراحل من أجل الحصول على الحل الأمثل للمسألة ككل، لكن ليس الجمع الحسابي البسيط للحلول المثلى المحلية للمراحل التي تتكون منها المسألة يعطينا الحل الأمثل للمسألة ككل بمعنى أن المقدار

$Z_{opt} = \Sigma_{k=1}^{n} f_{opt}(\varepsilon_{k-1} x_k)$ لا يشكل حلا أمثلا للمسألة ككل، وهنا تكمن الفكرة الأساسية لـ "بلمان R.Bellman".

لقد برهن "بلمان Bellman" أن الحل الأمثل لأي مرحلة يجب أن يكون أمثلا من وجهة نظر حل المسألة المطروحة ككل وليس حلا أمثلا من وجهة نظر تلك المرحلة فقط. أي أن الحل الأمثل للمرحلة (k) يجب أن ينطلق أو يعتمد على الحل المثل للمرحلة السابقة لها (k-1) ويحضر شروط إيجاد الحل المثل للمرحلة اللاحقة (k+1).

هذا هو مبدأ الأمثلة (le principe d'optimalité) في حل مسائل النماذج الديناميكية الذي اعتمد عليه (Bellman).

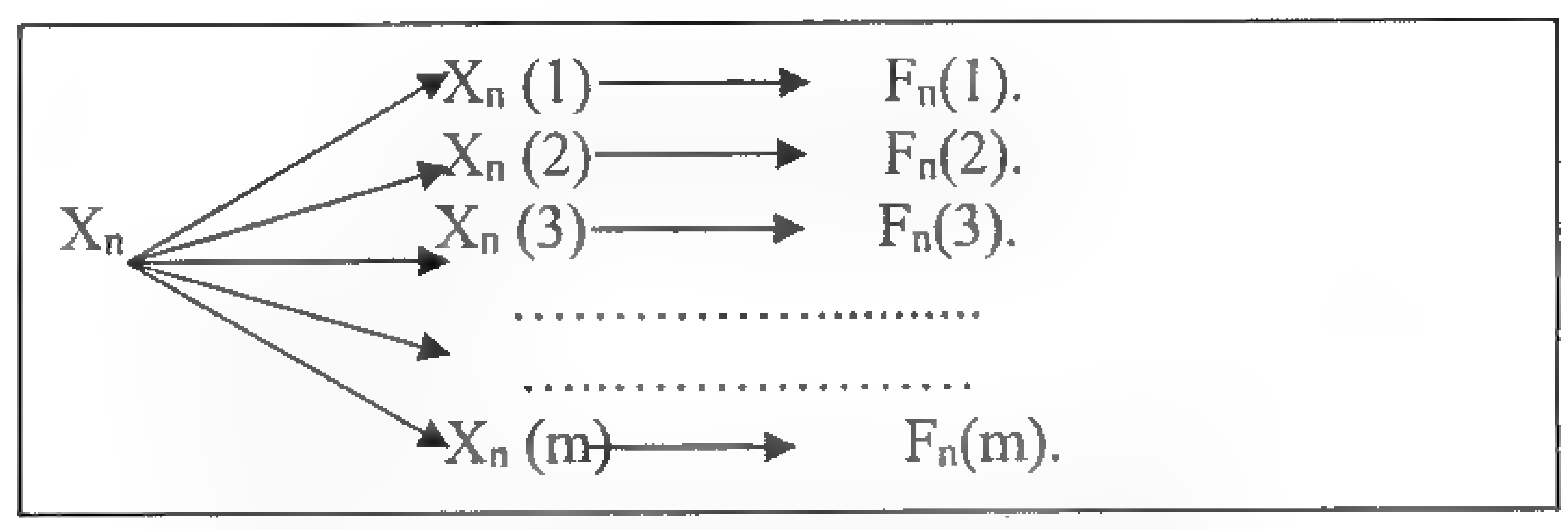
يمكن توضيح دور هذا المبدأ من خلال مسألة اختيار أقصر مسار للانتقال من النقطة (A) إلى النقطة (B) إذا كان هذا المسار يمر عبر عدة نقاط أخرى وسيطية. على الرسم هذه النقاط ممثلة بدوائر صغيرة والطرق الموصلة بينها معبر عنها بأسهم وعليها طول المسافة بين هذه النقاط.



إذا كنا نعتمد في حل هذه المسألة على الجمع البسيط للحلول المثلى المحلية للمراحل (للخطوات) فقط، أي البحث عن أقصر مسار بين كل نقطة والنقاط الموالية لها، فإنه يجب التحرك عبر المسار (A,A_1,A_3,A_2,A_4,B) الذي طوله34 . هذا المسار في الواقع لا يمثل حلا أمثلا لهذه المسألة أي لا يشكل المسار الأقصر الذي يمكن من خلاله التنقل من النقطة (A) إلى (B). فمثلا طول المسار (A, A_3, A_4, B) هو أقصر من الأول ويساوي 25 فقط.

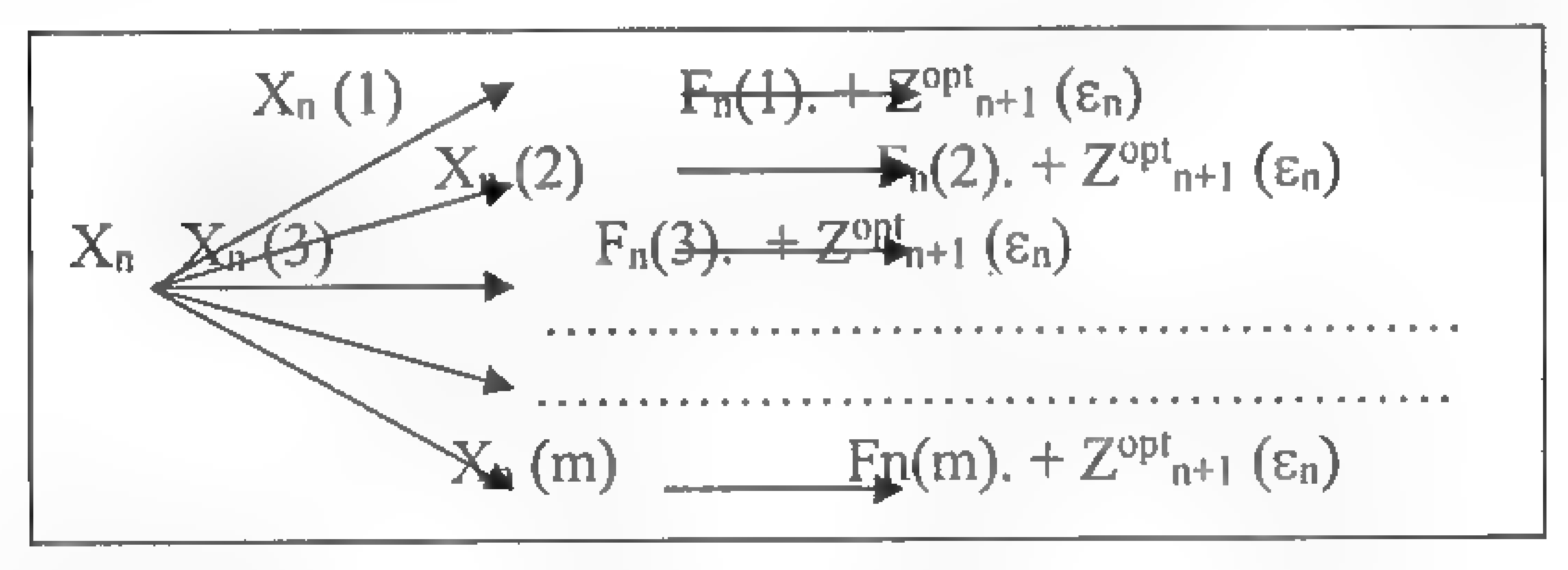
بالرغم من ذلك فإن حل هذه المسألة سيوضح أن المسار الثاني لا يشكل هو أيضا حلا أمثلا لهذه المسألة فمثلا المسار (A, A_6, A_7, B) يساوي 24 نقطة فقط. لذلك ومن أجل حل هذا النوع من المسائل وبالاعتماد على مبدأ الأمثلية، اقترح (Bellman) أن يبدأ الحل من المرحلة الأخيرة (n) على أساس أنه لا يوجد بعدها مراحل أخرى، نجد حلا أمثلا محليا لهذه المرحلة: $Z_n^{opt}(\varepsilon_{n-1})$ ونحتفظ به، ثم ننتقل إلى المرحلة السابقة لها (n-1) ونجد حلا أمثلا حتى هذه المرحلة بالاعتماد على الحل الأمثل للمرحلة اللاحقة وهي n.

المرحلةn:حلول المرحلة (n) تعتمد على القيم التي يأخذها متغير المرحلة (x_n)، فكلقيمة لـ(x_n) تقابلها قيمة لدالة هدف هذه المرحلة وهي f_n.



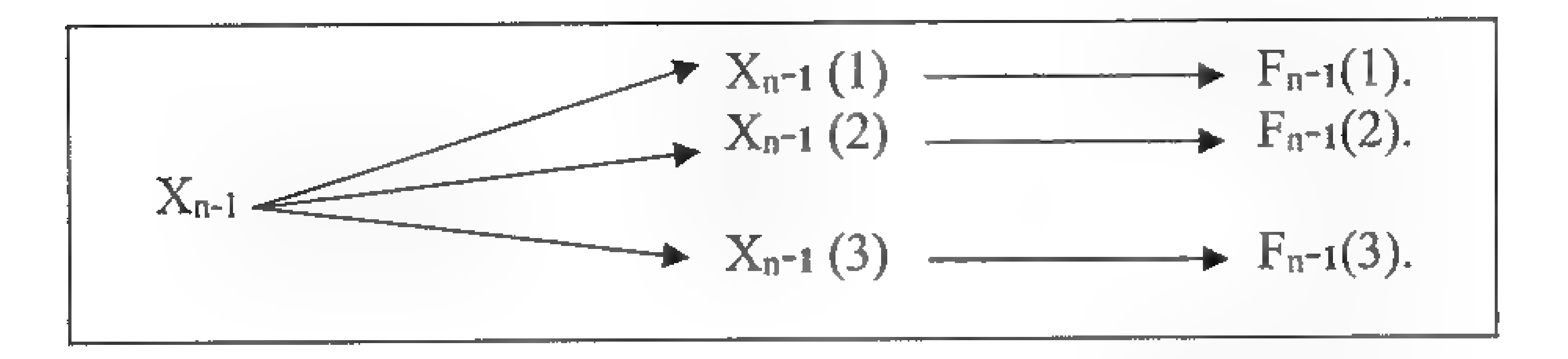
ثم نختار أعظم أو أدنى هذه القيم ويكون هذا هو الحل الأمثل لهذه المرحلة (أي الحل الأمثل المحلى لها) فقط ولا يشكل حلا أمثلا من وجهة نظر المسألة ككل.

من أجل أن يكون الحل الأمثل المحصل عليه في هذه المرحلة هو حلا أمثلا من وجهة نظر المسألة المطروحة ككل يجب أن نضيف إلى كل قيمة من قيم دالة الهدف في هذه المرحلة قيمة الحل الأمثل للمرحلة اللاحقة (n+1) لها وهو: $Z_{n+1}^{opt}(\varepsilon_n)$. فنحصل على:

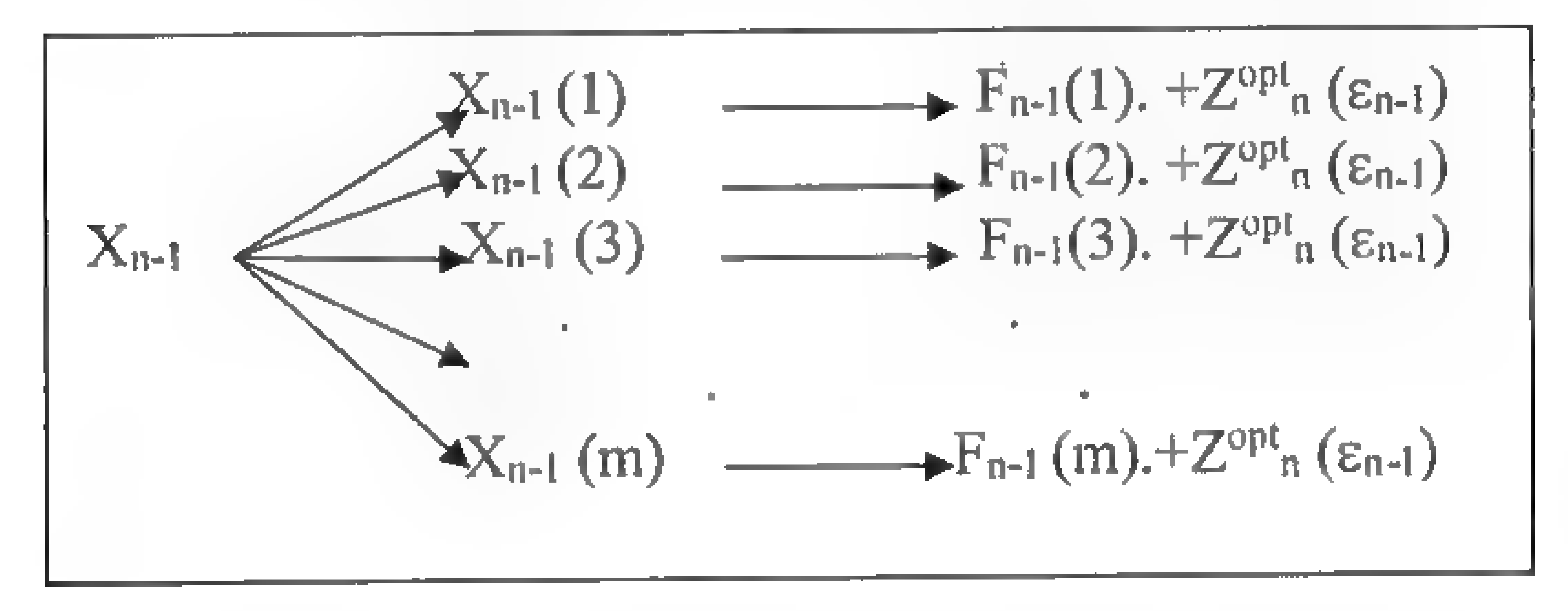


وحيث أن المرحلة (n+1) غير موجودة في المسألة المطروحة فإن $Z_{n+1}^{opt}(\varepsilon_n)=0$، لذلك فإن قيمة الحل الأمثل للمسألة حتى المرحلة (n) هو $Z_n^{opt}(\varepsilon_{n-1})$ فقط، وهو: $Z_n^{opt}(\varepsilon_{n-1}) = opt\ f_n$.

المرحلة n-1: قيم حلول المرحلة (n-1) تعتمد على القيم المختلفة التي يأخذها متغير المرحلة (x_{n-1})، فكل قيمة لـ(x_{n-1}) تعطينا حلا لهذه المرحلة يساوي f_{n-1}.



إذا أردنا أن نجد حلا أمثلا محليا لهذه المرحلة فقط فيجب أن نبحث عن أعظم أو أدنى قيمة من بين قيم (f_{n-1}) لكن إذا أردنا أن نجد حلا أمثلا للمسألة ككل حتى المرحلة (n-1) في هذه الحالة يجب إضافة قيمة الحل الأمثل للمرحلة اللاحقة وهي $Z_n^{opt}(\varepsilon_{n-1})$ الذي وجدنا قيمته في الخطوة السابقة من الحل إلى قيمة (f_{n-1}) التي تحصلنا عليها والمقابلة لكل قيمة لـ(x_{n-1})، أي أن:



ثم نختار أعظم أو أدنى هذه المقادير، أي:

$$Z_{n-1}^{opt}(\varepsilon_{n-2}) = \max(\min)\{f_{n-1} + Z_n^{opt} + (\varepsilon_{n-1})\ \}$$

إن الحل الأمثل المحصل في هذه الحالة نسميه بالحل الأمثل للمسألة حتى المرحلة التي نحن بصددها وهي(n-1) (بمعنى الحل الأمثل للمرحلتين (n) و(n-1) مع بعض)، وهكذا حتى نصل إلى المرحلة الأولى.

المرحلة n-2: متغير المرحلة في هذه الحالة هو x_{n-2} ومتغير الوضعية ε_{n-3} ودالة

$$f_{n-2}(\varepsilon_{n-3}, x_{n-2})$$

الهدف هنا هي:

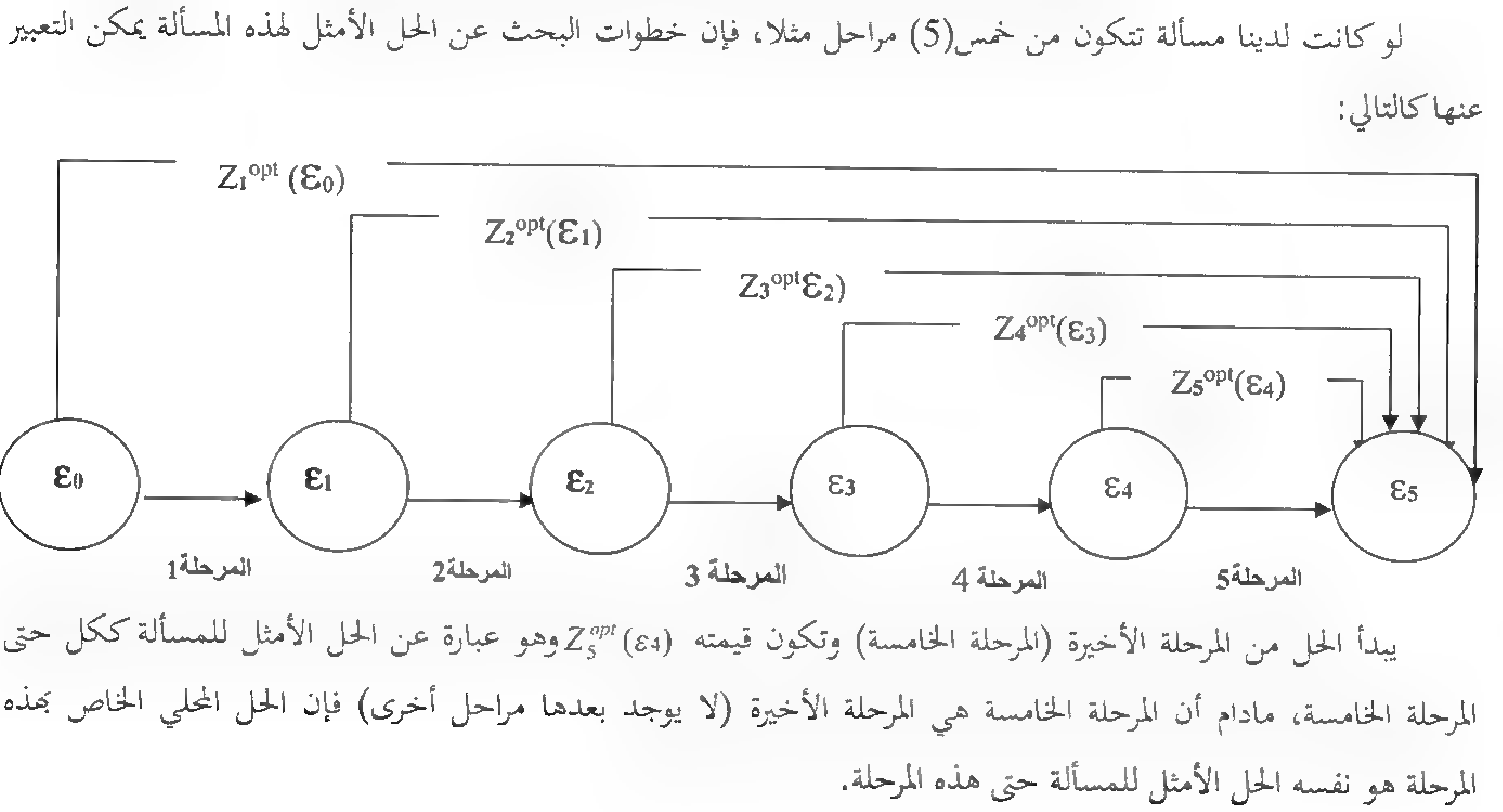
الحل الأمثل للمسألة ككل حتى هذه المرحلة هو:

$$Z_{n-2}^{opt}(\varepsilon_{n-3}) = \max(\min)\{f_{n-2}(\varepsilon_{n-3}, x_{n-2}) + Z_{n-1}^{opt}(\varepsilon_{n-2})\}$$

نستمر هكذا حتى نصل إلى المرحلة الأولى، ومنطقي أن الحل الأمثل للمسألة حتى المرحلة الأولى يساوي الحل الأمثل للمسألة ككل، والذي يعبر عنه في هذه الحالة كالتالي:

$$Z_1^{opt}(\varepsilon_0) = \max(\min)\{f_1(\varepsilon_0, x_1) + Z_2^{opt}(\varepsilon_1)\}$$

لو كانت لدينا مسألة تتكون من خمس(5) مراحل مثلا، فإن خطوات البحث عن الحل الأمثل لهذه المسألة يمكن التعبير عنها كالتالي:



يبدأ الحل من المرحلة الأخيرة (المرحلة الخامسة) وتكون قيمته $Z_5^{opt}(\varepsilon_4)$ وهو عبارة عن الحل الأمثل للمسألة ككل حتى المرحلة الخامسة، مادام أن المرحلة الخامسة هي المرحلة الأخيرة (لا يوجد بعدها مراحل أخرى) فإن الحل المحلي الخاص بهذه المرحلة هو نفسه الحل الأمثل للمسألة حتى هذه المرحلة.

ننتقل بعدها إلى البحث عن الحل الأمثل للمسألة حتى المرحلة الرابعة وهو يساوي $Z_4^{opt}(\varepsilon_3)$. قيمة هذا الحل، كما أشرنا سابقا، ليس عبارة عن الجمع البسيط للحلين المحلين للمرحلة الخامسة والرابعة بل يتمثل في الاختيار بين قيم حلول المرحلة الرابعة مضافا إلى كل واحد منهم الحل الأمثل حتى المرحلة الخامسة، من بين هذه القيم نختار القيمة المثلى (العظمى أو الدنيا) التي تشكل الحل الأمثل للمسألة ككل حتى المرحلة الرابعة. بقية عملية البحث عن الحل الأمثل للمسألة يتسلسل حسب المنهج المشار إليه أعلاه حتى نصل إلى الحل حتى المرحلة الأولى $Z_1^{opt}(\varepsilon_0)$، قيمة هذا الحل تمثل الحل الأمثل للمسألة ككل.

المبحث الثاني

تطبيقات نموذج البرمجة الديناميكية

من بين التطبيقات الكثيرة لنموذج البرمجة الديناميكية نشير إلى ميدان توزيع الاستثمارات، تعويض الآلات والتجهيزات الإنتاجية، تسيير المخزونات، تحديد المسارات المثلى عبر شبكة وغيرها.

I - توزيع الاستثمارات:

إن منهج البرمجة الديناميكية في معالجة توزيع الاستثمارات يمكن توضيحه من خلال المثال التالي:

مثال 1:

نفترض أن إدارة مؤسسة ما تريد توزيع مبلغ من الموارد المالية المتاحة لها(ε_0) على أربعة وحدات إنتاجية تابعة لها (E_1, E_2, E_3, E_4) لتمويل نشاطها الاستثماري. تهدف المؤسسة من خلال ذلك إلى الحصول على أقصى ربح ممكن من النشاط الكلي لهذه الوحدات مجتمعة. مع العلم أن المبلغ المتبقي (الفائض) عن حاجة نشاط المؤسسة (k) يستعمل في تمويل نشاط المؤسسة (k+1). توزيع المبلغ المالي الابتدائي (ε_0) على الوحدات الأربعة وكذلك القيمة الحالية للأرباح المتوقع الحصول عليها $f_J(x_J)$باستعمال المبالغ الموزعة (x_J) معطاة في الجدول التالي:

المبلغ المستعمل / المؤسسة	المؤسسة الأولى ε_1	المؤسسة الثانية ε_2	المؤسسة الثالثة ε_3	المؤسسة الرابعة ε_4
x_1	$F_1(x_1)$	$F_2(x_1)$	$F_3(x_1)$	$F_4(x_1)$
x_2	$F_1(x_2)$	$F_2(x_2)$	$F_3(x_2)$	$F_4(x_2)$
x_3	$F_1(x_3)$	$F_2(x_3)$	$F_3(x_3)$	$F_4(x_3)$
x_4	$F_1(x_4)$	$F_2(x_4)$	$F_3(x_4)$	$F_4(x_4)$

معطيات هذا الجدول تعني أن الوحدة الإنتاجية الأولى إذا تلقت مبلغ لتمويل نشاطها الاستثماري مقداره (x_1) فإن القيمة الحالية للربح الذي تتوقع الحصول عليه هي $f_1(x_1)$، أما إذا تلقت مبلغ مقداره (x_2)، يكون الربح المتوقع الحصول عليه هو$f_1(x_2)$، وهكذا بالنسبة للوحدة الإنتاجية الثانية إذا تلقت مبلغا استثماريا مقداره (x_1) فإن الربح الذي تتوقع الحصول عليه هو $f_2(x_1)$ أما في حالة حصولها على مبلغ مقداره (x_2) فيكون الربح الذي تحصل عليه هو $f_2(x_2)$...الخ.

المطلوب هو تحديد كيفية توزيع المبلغ الاستثماري الابتدائي المتاح لتمويل النشاط الاستثماري للوحدات الإنتاجية الأربعة من أجل الحصول على أعظم ربح ممكن من نشاط هذه الوحدات ج.على أساس أن:

- المبلغ الكلي الابتدائي هو ($\varepsilon_0 = 200$ وحدة نقدية)
- توزيع الموارد المالية على الوحدات الإنتاجية الأربعة وكذلك الأرباح المتوقعة الممكن الحصول عليها باستعمال هذه الموارد معطاة في الجدول التالي:

دالة الأرباح المتوقعة للوحدة ج. $f_i(x_i)$ / المبالغ الموظفة (x_i)	$f_1(x_1)$	$F_2(x_2)$	$F_3(x_3)$	$f_4(x_4)$
40	8	6	3	4
80	10	9	4	6
120	11	11	7	8
160	12	13	11	13
200	18	15	18	16

هذا الجدول يوضح أن الوحدة ج. الأولى إذا استعملت في نشاطها الاستثماري مبلغ بقيمة 40 و.ن. فإن الربح الذي تحققه سوف يكون 8 و.ن.، أما إذا استعملت 80 و.ن. فستحصل على ربح مقداره 10 و.ن. وهكذا.

بالنسبة للمؤسسة الثانية، إذا ما استعملت مبلغا مقداره 40 و.ن. فإن ما تتوقع الحصول عليه كربح هو 6 و.ن، وإذا تلقت موارد مالية بقيمة 80 و.ن. فإن الربح الذي تتوقع تحقيقه سوف يكون 9 و.ن وهكذا بالنسبة للوحدات ج. الأخرى.

لو أردنا حل المشكلة المطروحة دفعة واحدة أو في عملية واحدة فإنه يصعب بل وحتى يستحيل علينا فعل ذلك.لذلك فإنه يتعين علينا من أجل حلها إتباع منهج البرمجة الديناميكية المتمثل في النظر إلى نشاط المؤسسة ككل على أساس أنه عملية متصلة متعددة الخطوات أو المراحل، من أجل إمكانية استعمال البرمجة الديناميكية في الحل نعتبر أن نشاط كل وحدة إنتاجية من الوحدات الأربع هو خطوة أو مرحلة من نشاط المؤسسة ككل.

في المرحلة الأولى، المبلغ المتاح للتوزيع هو المبلغ الابتدائي (ε_0= 200و.ن)، تستعمل منه الوحدة الإنتاجية الأولىE_1 فعلا مبلغ (x_1) لتمويل نشاطها، ما يتبقى للتوزيع في المرحلة الثانية هو مبلغ ε_1حيث ($\varepsilon_1=\varepsilon_0-x_1$).

في المرحلة الثانية، المبلغ المتبقي المتاح للتوزيع هو (ε_1) تأخذ منه المؤسسة الثانية فعلا مبلغ (x_2) لتمويل نشاطها ويبقى للمرحلة الثالثة مبلغ (ε_2)، وهكذا يمكن تلخيص عملية توزيع المبالغ الاستثمارية على الوحدات الإنتاجية الأربع كالتالي:

المبلغ المتبقي (الفائض) الزائد عن حاجتها	المبلغ المستعمل من طرفها	المبلغ الابتدائي المتاح لنشاط الوحدة الإنتاجية	المبالغ الموزعة / الوحدة الإنتاجية
$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - x_1$	x_1	ε_0	E_1
$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - x_2$	x_2	ε_1	E_2
$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - x_3$	x_3	ε_2	E_3
$\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - x_4$	x_4	ε_3	E_4

$F_k(x_k)$: دالة الهدف للوحدة الإنتاجية رقم (k) وهي تعبر عن الأرباح المحصل عليها من نشاط الوحدة k إذا ما استثمر فيها مبلغ بقيمةx_k.

$Z_k(\varepsilon_{k-1}, x_k)$:الربح المحصل عليه من طرف الوحدة (k) وكل الموحدات اللاحقة لها، أي الربح المحصل عليه حتى الموحدة رقم k.

$Z_k^{max}(\varepsilon_{k-1})$: أقصى ربح يمكن الحصول عليه حتى الوحدة الإنتاجية الحالية k، بمعنى من الوحدة الأخيرة وحتى الوحدة k.

فمثلا $Z_4^{max}(\varepsilon_3)$ هو أقصى ربح تحصل عليه المؤسسة الأم حتى المرحلة الرابعة وهو يساوي الربح المحصل من طرف الوحدة الإنتاجية الرابعة لأنها هي الأخيرة.

$Z_3^{max}(\varepsilon_2)$ هو الربح الأقصى المحصل عليه حتى الوحدة الإنتاجية الثالثة (حتى المرحلة الثالثة) بمعنى الربح الأقصى المحصل عليه من نشاط الوحدة الرابعة والثالثة مجتمعة.

$Z_2^{max}(\varepsilon_1)$ الربح الأقصى المحصل عليه من طرف المؤسسة الأم من نشاط الوحدات الإنتاجية الرابعة، الثالثة والثانية مع بعض.

$Z_1^{max}(\varepsilon_0)$ هو الربح الأقصى المحصل عليه من نشاط الوحدات الإنتاجية الأربعة، وهو بالتالي يعبر عن الربح الكلي للمؤسسة الذي يمكن أن تحصل عليه من توزيع مواردها الأولى (ε_0) على الوحدات الأربعة، (الرابعة، الثالثة، الثانية والأولى).

كل العمليات المتسلسلة لمعالجة المشكلة المطروحة يمكن تلخيصها في الجدول التالي:

	المبلغ الابتدائي المتاح لنشاط الوحدة ج	المبلغ الموزع لصالح المؤسسة الحالية	المبلغ المتبقي للتوزيع للمراحل اللاحقة	قيمة دالة الهدف للمرحلة الحالية	قيمة الأرباح القصوى للمراحل اللاحقة	قيمة الربح الأقصى للمراحل اللاحقة+قيمة الربح في المرحلة الحالية	الربح الكلي الأقصى للمؤسسة حتى هذه المرحلة
المرحلة IV (نشاط الوحدة الرابعة)	ε_3	X_4	$\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - X_4$	$f_4(X_4)$	$Z_5^{max}(\varepsilon_4) = 0$	$Z_5^{max}(\varepsilon_4)\ f_{4(X_4)} +$	$Z_4^{max}(\varepsilon_3)$
المرحلة III نشاط الوحدة الثالثة)	ε_2	X_3	$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - X_3$	$f_3(X_3)$	$Z_4^{max}(\varepsilon_3)$	$f_{3(X_3)} + Z_4^{max}(\varepsilon_3)$	$Z_3^{max}(\varepsilon_2)$
المرحلة II (نشاط الوحدة الثانية)	ε_1	X_2	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - X_2$	$f_2(X_2)$	$Z_3^{max}(\varepsilon_2)$	$Z_3^{max}(\varepsilon_2)\ f_{2(X_2)+}$	$Z_2^{max}(\varepsilon_1)$
المرحلةI (نشاط الوحدة الأولي)	ε_0	X_1	$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - X_3$	$f_1(X_1)$	$Z_2^{max}(\varepsilon_1)$	$Z_2^{max}(\varepsilon_1)\ f_{1(X_1)+}$	$Z_1^{max}(\varepsilon_0)$

لو نبدأ الحساب من الأمام (أي من نشاط الوحدة الإنتاجية الأولى)، فيجب أن نحسب $Z_1^{max}(\varepsilon_0)$ وهذا يعني حساب $Z_1^{max}(\varepsilon_0) = f_1(x_1) + Z_2^{max}(\varepsilon_1)$، لكن $Z_2^{max}(\varepsilon_1)$ هو مقدار غير محدد الآن لذلك لا نستطيع حساب المقدار $Z_1^{max}(\varepsilon_0)$ ككل. لذلك نضطر إلى بدأ الحساب من الخلف (أي من نشاط الوحدة الإنتاجية الرابعة).

المرحلة الرابعة: نشاط الوحدة الإنتاجية الرابعة						
قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_4^{max}(\varepsilon_3)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $f_{4(x_4)} + Z_5^{max}(\varepsilon_4)$	قيمة الربح الأقصى حتى المرحلة اللاحقة $Z_5^{max}(\varepsilon_4)$	دالة الهدف في هذه المرحلة $f_4(x_4)$	المبلغ المتبقي للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - x_4$	المبلغ الممكن استثماره في هذه المرحلة x_4	المبلغ المتبقي في بداية المرحلة الرابعة ε_3
0	0 + 0 = 0 *	0	0	0	0	0
4	4 + 0 = 4 *	0	4	0	40	40
6	6 + 0 = 6 *	0	6	0	80	80
8	8 + 0 = 8 *	0	8	0	120	120
13	13 + 0 = 13 *	0	13	0	160	160
16	16 + 0 = 16 *	0	16	0	200	200

إن الأرباح القصوى التي من الممكن الحصول عليها من نشاط الوحدة ج. الرابعة عند مستويات مختلفة لـ(ε)، أي عند مستريات مختلفة للمبالغ المتبقية لنشاط هذه الوحدة، هي قيم $Z_4^{max}(\varepsilon_3)$ الموضحة في الجدول أعلاه.

بالنسبة للوحدة ج. الرابعة المبلغ المتبقي من توزيع الموارد على الوحدات الإنتاجية الأخرى وهو (ε) يساوي بالضرورة (X_4) وهو المبلغ المستثمر في نشاط هذه الوحدة الإنتاجية – لأن هذه الوحدة ج. هي الوحدة الأخيرة، وبالتالي فكل مبلغ فائض عن حاجة الوحدات الثلاثة الأولى يتبقى ويستثمر بأكمله، أي أن: $\varepsilon_3=X_4$. وأيضا هذا المبلغ يمكن أن يأخذ عدة مستويات على حسب ما يتبقى من نشاط الوحدات ج. الأخرى.

بمعنى آخر لو أن المبلغ المتبقي لنشاط الوحدة الرابعة (E_4) وهو (ε_3) أخذ عدة مستويات متمثلة في (40,0, 80, 120, 160, 200)، فإن أقصى ربح يمكن أن تحصل عليه المؤسسة الأم من نشاط الوحدة ج. الرابعة هو (0, 4, 6, 8, 13, 16).

المرحلة الثالثة : نشاط الوحدة الإنتاجية الثالثة

المبلغ المتبقي في بداية المرحلة الرابعة ε_2	المبلغ الممكن استثماره في هذه المرحلة X_3	المبلغ المتبقي للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - X_3$	دالة الهدف في هذه المرحلة $F_3(X_3)$	قيمة الربح الأقصى حتى المرحلة اللاحقة $Z_4^{max}(\varepsilon_3)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_4^{max}(\varepsilon_3) + f_{3(X_3)}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى نهاية المرحلة الحالية $Z_3^{max}(\varepsilon_2)$
0	0	0	0	0	0	0
40	0	40	0	4	0 +4 = 4*	4
	40	0	3	0	3 +0 = 3	
80	0	80	0	6	0 +6 = 6	7
	40	40	3	4	3 + 4 =7 *	
	80	0	4	0	4 +0=4	
120	0	120	0	8	0 + 8 = 8	9
	40	80	3	6	3 + 6 = 9 *	
	80	40	4	4	4 + 4= 8	
	120	0	7	0	7 + 0 = 7	
160	0	160	0	13	0 + 13 = 13 *	13
	40	120	3	8	3 + 8 = 11	
	80	80	4	6	4 = 6 = 10	
	120	40	7	4	7 +4 = 11	
	160	0	11	0	11 + 0 = 11	
200	0	200	0	16	0 + 16 = 16	18
	40	160	3	13	3 +13 = 16	
	80	120	4	8	4 + 8 = 12	
	120	80	7	6	7 + 6 = 13	
	160	40	11	4	11 + 4 = 15	
	200	0	18	0	18 + 0 = 18 *	

تحليل نتائج الجدول توضح أنه إذا كان المبلغ المتبقي لنشاط الوحدة الثالثة (E_3) هو $(\varepsilon_3=0)$ فإن أقصى ربح تحصل عليه المؤسسة من نشاط الوحدة الثالثة والرابعة يساوي صفر (0).

أما إذا كان المبلغ الفائض عن حاجة الوحدتين الأولى والثانية والمستعمل من طرف الوحدة الثالثة هو 40 و.ن. فإن أقصى ربح تحصل عليه المؤسسة من نشاط الوحدة الثالثة والرابعة مجتمعة يساوي (4و.ن).

وهكذا إذا كان المبلغ الفائض عن حاجة الوحدتين الأولى والثانية والمستعمل من طرف الوحدة الثالثة هو 200 و.ن، فإن أقصى ربح تحصل عليه المؤسسة من نشاط الوحدة الثالثة والرابعة في هذه الحالة يساوي صفر (18و.ن).

المرحلة الثانية: نشاط الوحدة الإنتاجية الثانية						
المبلغ المتبقي في بداية المرحلة الرابعة ε_1	المبلغ الممكن استثماره في هذه المرحلة X_2	المبلغ المتبقي للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - x_2$	دالة الهدف في هذه المرحلة $f_2(x_2)$	قيمة الربح الأقصى حتى المرحلة اللاحقة $Z_3^{\max}(\varepsilon_2)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_3^{\max}(\varepsilon_2) + f_2(x_2)$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى نهاية المرحلة الحالية $Z_2^{\max}(\varepsilon_1)$
0	0	0	0	0	0	0
40	0	40	0	4	0 +4 = 4	6
	40	0	6	0	6 +0 = 6 *	
80	0	80	0	7	0 +7 = 7	10
	40	40	6	4	6 + 4 = 10 *	
	80	0	9	0	9 + 0 = 9	
120	0	120	0	9	0 + 9 = 9	13
	40	80	6	7	6 + 7 = 13 *	
	80	40	9	4	9 + 4 = 13 *	
	120	0	11	0	11+ 0 = 11	
160	0	160	0	13	0 + 13 = 13	16
	40	120	6	9	6 + 9 = 15	
	80	80	9	7	9 + 7 = 16 *	
	120	40	11	4	11 + 4 = 15	
	160	0	13	0	13 + 0 = 13	
200	0	200	0	18	0 + 18 = 18	19
	40	160	6	13	6 +13 = 19 *	
	80	120	9	9	9 + 9 = 18	
	120	80	11	7	11 + 7 = 18	
	160	40	13	4	13 + 4 = 17	
	200	0	15	0	15 + 0 = 15	

الجدول أعلاه يوضح أنه إذا كان المبلغ المتبقي لنشاط الوحدة الثانية (E_2) هو ($\varepsilon_3 = 120$) مثلا فإن أقصى ربح تحصل عليه المؤسسة من نشاط الوحدة الثانية، الثالثة والرابعة يساوي (13و.ن.)، أما إذا كان المبلغ الفائض عن حاجة الوحدة الأولى والمستعمل من طرف الوحدة الثانية، الثالثة والرابعة هو 200 و.ن. فإن أقصى ربح تحصل عليه المؤسسة من نشاط الوحدة الثانية، الثالثة والرابعة يساوي (19و.ن).

المرحلة الأولى: نشاط الوحدة الإنتاجية الأولى

قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى نهاية المرحلة الحالية $Z_1^{max}(\varepsilon_0)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_2^{max}(\varepsilon_1) + f_1(x_1)$	قيمة الربح الأقصى حتى المرحلة اللاحقة $Z_2^{max}(\varepsilon_1)$	دالة الهدف في هذه المرحلة $f_1(x_1)$	المبلغ المتبقي للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - x_1$	المبلغ الممكن استثماره في هذه المرحلة X_1	الملبع المتبقي في بداية المرحلة الرابعة ε_0
24	0 + 19 = 19	19	0	200	0	
	18 +16 = 24 *	16	8	160	40	200
	10 + 13 = 23	13	10	120	80	
	11 + 10 = 21	10	11	80	120	
	12 + 6 = 18	6	12	40	160	
	18 + 0 = 18	0	18	0	200	

بالنسبة للوحدة الأولى فإن المبلغ المتبقي المتوفر لها هو المبلغ الابتدائي المتاح في البداية، وبالتالي فإن أقصى ربح يمكن أن تحصل عليه المؤسسة من نشاط كل الوحدات الإنتاجية (بمعنى من الوحدة الرابعة حتى الوحدة الأولى) يساوي 24 و.ن.

لقد عرفنا الآن قيمة الربح الأقصى الممكن الحصول عليه إذا ما وزعنا القيمة الابتدائية للموارد ($\varepsilon_0 = 200$و.ن)، على المؤسسات الأربعة، لكن لا نعرف إلى الآن كم يجب أن نخصص لـ(E_1) وكم يجب أن تستلم (E_2)، (E_3) و (E_4) حتى تحصل المؤسسة الأم على هذه الأرباح القصوى. ولا نعرف أيضا ما هو الربح الأقصى الذي تحققه الوحدات الإنتاجية (E_1)،(E_2)، (E_3)و (E_4). لمعرفة ذلك ننقل الأعمدة النهائية الخاصة بجدول كل مرحلة إلى جدول جديد يسمى الجدول الأساسي.

نحن نعلم من الجدول الأخير الخاص بنشاط الوحدة ج. الأولى، أن قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى المرحلة الأولى عند مستوى مبلغ متوفر في بداية هذه المرحلة ($\varepsilon_0=200$و.ن) كان يساوي $Z_1^{max}(\varepsilon_0) = 24$. هذا الربح الأقصى تم الحصول عليه باستثمار مبلغ مقداره ($x_1 = 40$) في المؤسسة الأولى. بمعنى آخر إذا كان المبلغ الإجمالي للموارد هو$\varepsilon_0 = 200$واستثمر منه مبلغ مقداره ($x_1 = 40$) في الوحدة ج. الأولى، فإن هذا سيؤدي إلى الحصول على أكبر ربح ممكن من الاستثمار في الوحدات الأربعة والذي مقداره هو 24 و.ن.، أما أقصى ربح ممكن تحققه الوحدة ج. الأولى فقط فيساوي $f_1(x_1) = f(40) = 8$. بعد الوحدة الإنتاجية الأولى المبلغ المتبقي للاستثمار في الوحدة الثانية وما تلاها هو ($\varepsilon_1=\varepsilon_0-x_1$) ويساوي ($\varepsilon_1 = 200- 40 =160$).

الآن نذهب إلى الجدول الخاص بـ(E_2)، ومنه نستنتج أنه إذا كان المبلغ المتوفر للاستثمار في بداية المرحلة الثانية هو ($\varepsilon_1 = 160$)، فإن أقصى ربح يمكن للمؤسسة الأم الحصول عليه من نشاط الوحدات الثانية، الثالثة والرابعة (بمعنى حتى المرحلة الثانية) هو 16 $(\varepsilon_1) = Z_2^{max}$، هذا المستوى من الأرباح يتم الحصول عليه باستثمار مبلغ ($x_2 = 80$) في الوحدة الثانية. هذا المبلغ يضمن للوحدة الثانية الحصول على أقصى ربح من نشاطها وهو: $f_2(x_2) = f(80) = 9$.

وفق هذا التحليل يكون شكل الجدول الأساسي هو كالتالي:

المرحلة K	المبلغ المتبقي في بداية المرحلة ε_{k-1}	الربح الأقصى المحصل عليه حتى نهاية المرحلة $Z_k^{max}(\varepsilon_{k-1})$	المبلغ الممكن استثماره في هذه المرحلة X_k	القيمة المثلى لدالة الهدف في هذه المرحلة $f_k(X_k)max$	المبلغ المتبقي للاستثمار في المرحلة القادمة ε_k
I	200	24	40	8	160
II	160	16	80	9	80
III	80	7	40	3	40
IV	40	4	40	4	0
	$\sum$		200	24	

إذن من أجل تحقيق أقصى ربح يساوي 24 و.ن.، يجب توزيع الموارد المتاحة للاستثمار (200 و.ن.) بين الوحدات الإنتاجية الأربعة، بحيث تحصل الوحدة:

الأولى (E_1) على مبلغ ($x_1 = 40$) وتحقق مقابله ربح أقصى يساوي (8و.ن.)

الثانية (E2) على مبلغ ($x2 = 80$) وتحقق مقابله ربح أقصى يساوي (9و.ن.)

الثالثة (E3) على مبلغ ($x3 = 40$) وتحقق مقابله ربح أقصى يساوي (3و.ن.)

الرابعة (E4) على مبلغ ($x4 = 40$) وتحقق مقابله ربح أقصى يساوي (4و.ن.)

وتكـون بهذا الشكل مجموع المباغ المستثمـرة كالتالـي (40 +80 +40 + 40 =200و.ن.) ومجموع الأرباح القصوى المحصل عليها من طرف المؤسسة الأم هي (8 + 9 + 3 + 4 = 24و.ن.).

مثال 2:

يريد أحد الطلبة أن يعمل خارج وقت الدراسة من أجل استكمال تغطية مصاريف دراسته، وحتى لا يؤثر على دراسته قرر الطالب أن لا يحدد عددا ثابتا أقصى من ساعات العمل التي يخصصها للعمل في الأسبوع. عدم استقرار النشاط الدراسي للطالب أثناء السنة الجامعية (فترة التحضير للامتحانات، تحضير البحوث، وغيرها)، اضطر هذا الطالب إلى عدم تحديد عددا أقصى من ساعات العمل في الأسبوع التي يكون دائما فيها مستعدا (يخصصها) للعمل. بل اكتفى باقتراح مجموعة من احتمالات أوقات العمل تختلف باختلاف أوقات فراغه (في وقت التحضير للامتحانات يمكن للطالب أن يخفض الوقت المتاح للعمل من 4 ساعات إلى 3،2،1 ساعات أو حتى إلى صفر ساعة).

بعد البحث تمكن الطالب من الحصول على أربع إمكانيات للعمل. إمكانيات العمل الأربعة وكذلك الأجور الممنوحة فيها وعدد ساعات العمل المتاحة للطالب معطاة في الجدول التالي:

الأجور في مكان العمل / عدد ساعات العمل	مكان العمل IV	مكان العمل III	مكان العمل II	مكان العمل I
0	0	0	0	0
1	26	23	16	19
2	39	36	32	36
3	48	44	48	47
4	54	49	64	56

المطلوب: كيف يمكن للطالب أن يوزع عدد ساعات عمله المتاحة على أماكن العمل الأربعة في الأسبوع من أجل أن يعظم أجره الكلي في حالة ما إذا كان عدد ساعات العمل الكلية المتاحة هو4 ساعات، وفي حالة ما إذا كانت 3 ، 2، أو ساعة واحدة فقط.

الحل:

نشاط الطالب في عدة أماكن مختلفة والبحث عن كيفية توزيع وقت عمله بينهما من أجل تعظيم أجره الكلي من النشاط فيها يمكن النظر إليه على أنه نشاط مركب ومتعدد المراحل ويمكن حله باستخدام تقنية البرمجة الديناميكية.

نقسم نشاط الطالب إلى مراحل، وكل مرحلة خاصة بعمله في مكان عمل واحد.

نرمز بـε_K لعدد ساعات العمل المتاحة للطالب للعمل في مكان العمل (K).

نرمز أيضا بـــX_K لعدد ساعات العمل التي يعملها الطالب **فعلا** في مكان العمل (K).

ε_{K-1}هو عدد ساعات العمل المتبقية للعمل في المرحلة اللاحقة (K+1).

$f_k(x_k)$ هي دالة هدف المرحلة (K) وهي تعبر عن الأجر لمحصل عليه في مكان العمل K بالعمل عدد من ساعات العمل مقداره X_K .

$Z_k(\varepsilon_k, x_K)$ هي قيمة الأجر المحصل عليه حتى المرحلة (K).

$Z_k^{\max}(\varepsilon_k)$ هي قيمة الأجر الأقصى الكلي المحصل عليه حتى المرحلة (K).

المرحلة الرابعة: مكان العمل الرابع						
عدد ساعات العمل المتبقية في بداية المرحلة الحالية ε_3	عدد ساعات العمل الممكن استعلالها في هذه المرحلة X_4	ساعات العمل المتبقية للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - X_4$	قيمة الأجر المحصل عليه فيهذه المرحلة $f_4(X_4)$	قيمة أكبر أجر محصل عليه حتى المرحلة اللاحقة $Z_5^{\max}(\varepsilon_4)$	قيمة الأجر المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $f_{4(X_4)} + Z_5^{\max}(\varepsilon_4)$	قيمة أعظم أجر محصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_4^{\max}(\varepsilon_3)$
0	0	0	0	0	0 + 0 = 0 *	0
1	1	0	19	0	19+ 0 = 19 *	19
2	2	0	36	0	36 +0 = 36	36
3	3	0	47	0	47 + 0 = 47 *	47
4	4	0	56	0	56 + 0 = 56 *	56

المرحلة الثالثة: مكان العمل الثالث

عدد ساعات العملالمتبقية في بداية المرحلة الحالية ε_2	عدد ساعات العمل الممكن استغلالها في هذه المرحلة X_3	ساعات العمل المتبقية للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - X_3$	قيمة الأجر المحصل عليه فيهذه المرحلة $f_3(X_3)$	قيمة أكبر أجر محصل عليه حتى المرحلة اللاحقة $Z_4^{max}(\varepsilon_3)$	قيمة الأجر المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $f_{3(X_3)} + Z_4^{max}(\varepsilon_3)$	قيمة أعظم أجر محصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_3^{max}(\varepsilon_2)$
0	0	0	0	0	0 + 0 = 0 *	0
1	0	1	0	19	0 +19 = 19 *	19
	1	0	16	0	16 + 0 = 16	
2	0	2	0	36	0 + 36 = 36	36
	1	1	16	19	16 + 19 = 35	
	2	0	32	0	32 + 0 = 32	
3	0	3	0	47	0 + 47 = 47	52
	1	2	16	36	16 + 36 = 52 *	
	2	1	32	19	32 + 19 = 51	
	3	0	48	0	48 + 0 = 48	
4	0	4	0	56	0 + 56 = 56	68
	1	3	16	47	16 + 47 = 63	
	2	2	32	36	32 + 36 = 68 *	
	3	1	48	19	48 + 19 = 67	
	4	0	64	0	64 + 0 = 64	

المرحلة الثانية: مكان العمل الثاني						
عدد ساعات العمل المتبقية في بداية المرحلة الحالية ε_1	عدد ساعات العمل الممكن استغلالها في هذه المرحلة X_2	ساعات العمل المتقية للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - X_2$	قيمة الأجر المحصل عليه فيهذه المرحلة $f_2(X_2)$	قيمة أكبر أجر محصل عليه حتى المرحلة اللاحقة $Z_3^{max}(\varepsilon_2)$	قيمة الأجر المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $f_{2(X_2)} + Z_3^{max}(\varepsilon_2)$	قيمة أعظم أجر محصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_2^{max}(\varepsilon_1)$
0	0	0	0	0	0 + 0 = 0 *	0
1	0 1	1 0	0 23	19 0	0 +19 = 19 23 + 0 = 23 *	23
2	0 1 2	2 1 0	0 23 36	36 19 0	0 + 36 = 36 23 + 19 = 42 * 36 + 0 = 36	42
3	0 1 2 3	3 2 1 0	0 23 36 44	52 36 19 0	0 + 52 = 52 23 + 36 = 59 36 + 19 = 55 44 + 0 = 44	59
4	0 1 2 3 4	4 3 2 1 0	0 23 36 44 49	68 52 36 19 0	0 + 68 = 68 23 + 52 =75 * 36 + 36 = 72 44 + 19 = 63 49 + 0 = 49	75

المرحلة الأولى: مكان العمل الأول

عدد ساعات العمل المتبقيه في بداية المرحلة الحالية ε_0	عدد ساعات العمل الممكن استغلالها في هذه المرحلة X_1	ساعات العمل المتبقية للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - x_1$	قيمة الأجر المحصل عليه في هذه المرحلة $f_1(x_1)$	قيمة أكبر أجر محصل عليه حتى المرحلة اللاحقة $Z_2^{max}(\varepsilon_1)$	قيمة الأجر المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $f_1(x_1) + Z_2^{max}(\varepsilon_2)$	قيمة أعظم أجر محصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_1^{max}(\varepsilon_0)$
إذا لم يخصص ولا ساعة للعمل(0)	0	0	0	0	0 + 0 = 0 *	0
إذا خصص للعمل ساعة واحدة في الأسبوع(1)	0 1	1 0	0 26	23 0	0 + 23 = 23 26 + 0 = 26 *	26
إذا خصص للعمل ساعتين في الأسبوع(2)	0 1 2	2 1 0	0 26 39	42 23 0	0 + 42 = 42 26 +239 = 49* 39+ 0 = 39	49
إذا خصص للعمل 3 ساعات في الأسبوع(3)	0 1 2 3	3 2 1 0	0 26 39 48	59 42 23 0	0 + 59 = 59 26+ 42 = 68* 39 + 23 = 62 48 + 0 = 48	68
إذا خصص للعمل 4 ساعات في الأسبوع(4)	0 1 2 3 4	4 3 2 1 0	0 26 39 48 54	75 59 42 23 0	0 + 75 = 75 26 + 59 = 85 39+ 42 = 81 48 + 23 = 71 54+ 0 = 54	85

لقد عرفنا الآن قيمة الأجر الإجمالي الأقصى الذي يمكن للطالب أن يحصل عليه إذا ما قام بالعمل في أماكن العمل الأربعة في الحالات التالية:

-إذا كان عدد ساعات العمل المتاحة للعمل في بداية المرحلة الأولى هي (4 ساعات)، فيحصل الطالب من عمله في الأماكن الأربعة على أجر أقصى مقداره 85 و.ن.

– إذا كان عدد ساعات العمل التي يمكن للطالب أن يعملها منذ البداية هي (3 ساعات فقط)، فإن أقصى أجر يمكن أن يحصل عليه في أماكن العمل الأربعة هو68 و.ن.

– عندما يخصص للعمل (2 ساعة فقط) فيحصل على أجر حده الأقصى 49و.ن.

– وعندما تكون عدد ساعات العمل المتاحة هو ساعة واحدة فقط، فإن الأجر الأقصى الممكن الحصول عليه هو 26 و.ن.

لكننا لا نعرف إلى حد الآن، في الحالات الأربعة، كم من ساعة يجب أن يعمل الطالب في أماكن الأربعة، وما هو الأجر الأقصى الذي يحصل عليه في كل مكان عمل.

سنتعرض لإمكانيات العمل الأربعة للطالب المذكور، ونوضح ما هو الأجر الأقصى الذي يحصل عليه في كل مكان عمل.

الحالة الأولى: وقت العمل المتاح هو 4 ساعات:

إذا كان الطالب يخصص 4 ساعات للعمل في الأسبوع ($\varepsilon_0=4$)، فإنه يحصل على أقصى أجر ممكن يساوي 85 و.ن. بعمله في مكان العمل الأول ساعة واحدة،

في مكان العمل الثاني ساعة واحدة أيضا، لا يعمل في مكان العمل الثالث (صفر ساعة) وساعتان في مكان العمل الرابع.

الجدول التالي يلخص هذه الحالة:

	مكان العمل	ε_{k-1}	$Z_k^{max}(\varepsilon_{k-1})$	X_k	$f_k(x_k)_{max}$	ε_k
T = 4 ($\varepsilon_0=4$)	I	$\varepsilon_0 = 4$	85	1	26	$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - X_1$ $\varepsilon_1 = 4 - 1 = 3$
	II	$\varepsilon_1 = 3$	59	1	23	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - X_2$ $\varepsilon_2 = 3 - 1 = 2$
	III	$\varepsilon_2 = 2$	36	0	0	$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - X_3$ $\varepsilon_3 = 2 - 0 = 2$
	IV	$\varepsilon_3 = 2$	36	2	36	$\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - X_4$ $\varepsilon_4 = 0 - 0 = 0$
		$\sum$		4	85	

الحالة الثانية: وقت العمل المتاح هو 3 ساعات:

إذا كان وقت العمل الأسبوعي المتاح للطالب هو 3 ساعات فقط ($\varepsilon_0 = 3$)، فإن أقصى أجر كلي يمكن أن يحصل عليه من عمله في أماكن العمل الأربعة هو: 68 و.ن.

وذلك بتخصيصه ساعة واحدة لمكان العمل الأول، ساعة واحدة أيضا لمكان العمل الثاني، صفر ساعة لمكان العمل الثالث وساعة واحدة لمكان العمل الرابع.

الجدول التالي يعطي ملخصا لهذه الحالة:

	مكان العمل	ε_{k-1}	$Z_k^{max}(\varepsilon_{k-1})$	X_k	$f_k(x_k)_{max}$	ε_k
T = 3 ($\varepsilon_0 = 3$)	I	$\varepsilon_0 = 3$	68	1	26	$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - X_1$ $\varepsilon_1 = 3 - 1 = 2$
	II	$\varepsilon_1 = 2$	42	1	23	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - X_2$ $\varepsilon_2 = 2 - 1 = 1$
	III	$\varepsilon_2 = 1$	19	0	0	$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - X_3$ $\varepsilon_3 = 1 - 0 = 1$
	IV	$\varepsilon_3 = 1$	19	1	19	$\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - X_4$ $\varepsilon_4 = 1 - 1 = 0$
		$\sum$		3	68	

الحالة الثالثة: وقت العمل المتاح هو 2 ساعة:

إذا كان أقصى ما يخصصه الطالب في الأسبوع من وقت للعمل خارج الجامعة هو 02 ساعة فقط ($\varepsilon_0 = 2$)، فيكون أجره الأقصى الممكن الحصول عليه من العمل في الأماكن الأربعة هو:49 و.ن.

ويمكن تلخيص ذلك كالتالي:

	مكان العمل	ε_{k-1}	$Z_k^{max}(\varepsilon_{k-1})$	X_k	$f_k(x_k)_{max}$	ε_k
T = 2 ($\varepsilon_0 = 2$)	I	$\varepsilon_0 = 2$	49	1	26	$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - X_1$ $\varepsilon_1 = 2 - 1 = 1$
	II	$\varepsilon_1 = 1$	23	1	23	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - X_2$ $\varepsilon_2 = 1 - 1 = 0$
	III	$\varepsilon_2 = 0$	0	0	0	$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - X_3$ $\varepsilon_3 = 0 - 0 = 0$
	IV	$\varepsilon_3 = 0$	0	0	0	$\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - X_4$ $\varepsilon_4 = 1 - 1 = 0$
		$\sum$		2	49	

الحالة الرابعة: وقت العمل المتاح هو 1 ساعة:

إذا كان عدد ساعات العمل الأسبوعي المتاح لطالب للعمل خارج الجامعة هو ساعة واحدة فقط ($\varepsilon_0 = 1$)، فإن أقصى أجر يمكن أن يحصل عليه هذا الطالب يساوي 26و.ن.

نتائج عمل الطالب في هذه الحالة يمكن عرضها في الجدول التالي:

	مكان العمل	ε_{k-1}	$Z_k^{max}(\varepsilon_{k-1})$	X_k	$f_k(x_k)max$	ε_k
T = 1 (ε_0=1)	I	$\varepsilon_0=1$	26	1	26	$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - X_1$ $\varepsilon_1 = 1 - 1 = 0$
	II	$\varepsilon_1=0$	0	0	0	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - X_2$ $\varepsilon_2 = 0 - 0 = 0$
	III	$\varepsilon_2=0$	0	0	0	$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - X_3$ $\varepsilon_3 = 0 - 0 = 0$
	IV	$\varepsilon_3=0$	0	0	0	$\varepsilon_4 = \varepsilon_3 - X_4$ $\varepsilon_4 = 0 - 0 = 0$
		$\sum$		1	26	

مثال 3:

لدى أحد المستثمرين إمكانية لتوظيف مبلغ A مقداره 700 و.ن. في ثلاث مشاريع مختلفة. توزيع هذا المبلغ على المشاريع الثلاثة والقيمة الحالية للتدفقات النقدية الممكن الحصول عليها من هذه المشاريع معطاة في الجدول التالي:

حجم الاستثمار X_i	القيمة الحالية للنتائج المتوقعة من المشاريع الثلاثة		
	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2)$	$f_3(x_3)$
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

المطلوب: تحديد مبالغ الاستثمار (X_i) التي يجب استثمارها في كل مشروع من أجل تعظيم قيمة التدفق الكلي المحصل عليها من هذا الاستثمار.

الحل:

هذه المسألة يمكن النظر إليها على أنها متعددة المراحل، إذا بحثنا مردودية الاستثمار في مشروع واحد ثم في اثنين ثم في المشاريع الثلاثة. حسب هذا المنهج يكون لدينا ثلاث مراحل للتعامل مع هذه المسألة، كل مرحلة تتميز بحجم الاستثمار الذي يجب توظيفه في هذه المرحلة.

إذن متغيرات هذه المسألة تكون كالتالي:

ε_i: قيمة مبلغ الاستثمار المتبقي للتوزيع في المرحلة (i).

ε_{i+1}: قيمة مبلغ الاستثمار المتبقي للتوزيع في المرحلة (i+1).

X_i : قيمة مبلغ الاستثمار المستعمل فعلا في في المرحلة (i).

$f_i(x_i)$: دالة الهدف للمرحلة(i)، أي قيمة التدفق النقدي المتوقع الحصول عليه في هذه المرحلة (في المشروع i).

المرحلة الثالثة : مشروع الاستثمار الثالث						
مبلغ الاستثمار المتبقي في بداية المرحلة الحالية ε_2	المبلغ الممكن استثماره في هذه المرحلة(المشروع) X_3	المبلغ المتبقي للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - X_3$	قيمة التدفق ن. المحصل عليه في هذه المرحلة $f_3(X_3)$	القيمة القصوى للتدفق ن. المحصل عليه حتى المرحلة اللاحقة $Z_4^{max}(\varepsilon_3)$	قيمة التدفق ن. المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $f_3(x_3) + Z_4^{max}(\varepsilon_3)$	القيمة القصوى للتدفق ن. المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_3^{max}(\varepsilon_2)$
0	0	0	0	0	0 + 0 = 0 *	0
100	100	0	40	0	40+ 0 = 40 *	40
200	200	0	50	0	50 +0 = 50 *	50
300	300	0	110	0	110 + 0 =110*	110
400	400	0	120	0	120 + 0 =120*	120
500	500	0	180	0	180 + 0= 180*	180
600	600	0	220	0	220 = 0 =220*	220
700	700	0	240	0	240+ 0 =240*	240

المرحلة الثانية : مشروع الاستثمار الثاني						
مبلغ الاستثمار المتبقي في بداية المرحلة الحالية ε_1	المبلغ الممكن استثماره في هذه المرحلة(المشروع) X_2	المبلغ المتبقي للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - X_2$	قيمة التدفق ن. المحصل عليه في هذه المرحلة $f_2(X_2)$	القيمة القصوى للتدفق ن. المحصل عليه حتى المرحلة اللاحقة $Z_3^{\max}(\varepsilon_2)$	قيمة التدفق ن. المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $f_{2(X_2)} + Z_3^{\max}(\varepsilon_2)$	القيمة القصوى للتدفق ن. المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_2^{\max}(\varepsilon_1)$
0	0	0	0	0	0 + 0 = 0 *	0
100	0 100	100 0	0 50	40 0	0 +40 = 40 50 + 0 = 50 *	50
200	0 100 200	200 100 0	0 50 80	50 40 0	0 + 50 = 50 50 + 40 = 90 * 80 + 0 = 80	90
300	0 100 200 300	300 200 100 0	0 50 80 90	110 50 40 0	0 + 110 = 110 50 + 50 =100 80 + 40 =120* 90 + 0 = 90	120

400	0 100 200 300 400	400 300 200 100 0	0 50 80 90 150	120 110 50 40 0	0 + 120= 120 50 +110=160* 80+ 50 =130 90 + 40 = 130 150+ 0 = 150	160
500	0 100 200 300 400 500	500 400 300 200 100 0	0 50 80 90 150 190	180 120 110 50 40 0	0 + 180= 180 50 +120=170 80+110 =190* 90 + 50 = 140 150+ 40=190* 190 +0 =190*	190
600	0 100 200 300 400 500 600	600 500 400 300 200 100 0	0 50 80 90 150 190 210	220 180 120 110 50 40 0	0 + 220= 220 50 +180=230* 80+120 =200 90 +110=200 150+ 50=200 190 +40=230* 210 +0=210	230
700	0 100 200 300 400 500 600 700	700 600 500 400 300 200 100 0	0 50 80 90 150 190 210 220	240 220 180 120 110 50 40 0	0 + 240= 240 50 +220= 270 80+180 =260 90 +120=210 150+ 110=260 190 +50=240 210 +40=250 220 +0=220	270

المرحلة الأولى : مشروع الاستثمار الأول						
القيمة القصوى للتدفق ن. المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_1^{max}(\varepsilon_0)$	قيمة التدفق ن. المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $f_{1(X_1)} + Z_2^{max}(\varepsilon_1)$	القيمة القصوى للتدفق ن. المحصل عليه حتى المرحلة اللاحقة $Z_2^{max}(\varepsilon_1)$	قيمة التدفق ن. المحصل عليه في هذه المرحلة $f_1(x_1)$	المبلغ المتبقي للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - X_1$	المبلغ الممكن استثماره في هذه المرحلة(المشروع) X_1	مبلغ الاستثمار المتبقي في بداية المرحلة الحالية ε_0
0	0 + 0 = 0 *	0	0	0	0	
270	0 + 270= 270	270	0	700	0	700
	30 +230= 260	230	30	600	100	
	50+ 90 =240	190	50	500	200	
	90 +160=250	160	90	400	300	
	110+ 120=230	120	110	300	400	
	170 + 90=260	90	170	200	500	
	180 + 50=230	50	180	100	600	
	210 + 0=210	0	210	0	700	

أقصى تدفق نقدي يمكن الحصول عليه حتى المرحلة الأولى (حتى المشروع الأول) يساوي 270 = $Z_1^{max}(\varepsilon_0)$.

من أجل الحصول على هذا التدفق النقدي الأقصى يجب استثمار صفر مبلغ في المشروع الأول، 100 و.ن. في المشروع الثاني و600 و.ن. في المشروع الثالث. أي يجب توزيع مبلغ الاستثمار الابتدائي وهو 700 و.ن. على المشاريع الاستثمارية كالتالي:

صفر وحدة نقدية في المشروع الأول بتدفق نقدي متوقع يساوي صفر.

100و.ن. في المشروع الثاني بتدفق نقدي متوقع أقصاه 50و.ن.

600 و.ن. في المشروع الثالث بتدفق نقدي متوقع أقصاه 220و.ن.

الملخص:

	المشروع	ε_{K-1}	$Z_k^{\max}(\varepsilon_k - 1)$	X_k	$f_k(x_k)\max$	ε_k
المبلغ المتاح للاستثمار (ε_0= 700)	I	ε_0= 700	270	0	0	$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - X_1$ ε_1= 700 – 0= 700
	II	ε_1 =700	270	100	50	$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - X_2$ ε_2 =700 – 0 = 600
	III	ε_2 =600	220	600	220	$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - X_3$ ε_3 =600–600 = 0
		$\sum$		700	270	

مثال 4:

تقوم مقاولة باستخراج الحصى من ثلاث مقالع وتستعمل في نشاطها هذا 9 مكسرات للحصى، لكن وبسبب عدم استقرار وضعها المالي، فإن المقاولة لا تستطيع أن تشغل دائما كل المكسرات التسعة مع بعض في المقالع الثلاثة (يمكن أن تشغل 4 في فترة ما و6 في فترة أخرى أما في فترة ثالثة فيمكن أن تشغل 3 مكسرات فقط).

مردودية المكسرات التسعة في المقالع الثلاثة مقاسة بالطن معطاة في الجدول التالي:

المقلع عدد / المكسرات المستعملة	I (الطن)	II (الطن)	III (الطن)
1	5	7	6
2	9	9	10
3	12	11	13
4	14	13	15
5	15	16	16
6	18	19	18
7	20	21	21
8	24	22	22
9	27	25	25

المطلوب: كيف يمكن للمقاولة أن توزع مكسرات الحصى المتاحة على المقالع الثلاثة من أجل أن تستخرج أقصى كمية من الحصى من المقالع الثلاثة في الظروف المالية المختلفة التي تصادفها المؤسسة (عند مستويات مختلفة لـε_0).

الحل:

نشاط المقاولة في المقالع الثلاثة يحتم عليها توزيع المكسرات على هذه المقالع بحيث تنتج أكبر قدر من الحصى من نشاطها.

يمكن نمذجة هذا النشاط في شكل نموذج برمجة ديناميكية، بحيث نقسم نشاط المقاولة إلى ثلاث مراحل وكل مرحلة خاصة بنشاط مقلع من المقالع.

نرمز بε_iلعدد مكسرات الحصى المتاحة للمقاولة في المرحلةi.

ε_{i+1} : عدد المكسرات المتبقية للعمل في المقلع الموالي $(1 + i)$.

X_i : عدد المكسرات التي تستعملها المقاولة فعلا في المقلع i.

$f_i(x_i)$: كمية الحصى المستخرجة من المقلع (i) .

$f_{i(xi)} + Z_{i+1}^{max}(\varepsilon_{i+1})$: كمية الحصى المستخرجة من المرحلة النهائية وحتى المرحلة الحالية (i) .

$Z_i^{max}(\varepsilon_i)$: كمية الحصى القصوى الكلية المستخرجة من المرحلة النهائية وحتى المرحلة(i).

نبدأ الحل من المقلع الثالث.

المرحلة الثالثة: المقلع الثالث						
عدد المكسرات المتوفرة في بداية المرحلة الحالية ε_2	عدد المكسرات المستعملة فعلا في هذه المرحلة (المقلع) X_3	عدد المكسرات المتبقية للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_3 = \varepsilon_2 - x_3$	كمية الحصى المستخرجة خلال هذه المرحلة $f_3(x_3)$	كمية الحصى القصوى المستخرجة حتى المرحلة اللاحقة $Z_4^{\max}(\varepsilon_3)$	كمية الحصى المستخرجة حتى المرحلة الحالية $f_{3(x_3)} + Z_4^{\max}(\varepsilon_3)$	كمية الحصى القصوى المستخرجة حتى المرحلة الحالية $Z_3^{\max}(\varepsilon_2)$
0	0	0	0	0	0 + 0 = 0 *	0
1	1	0	6	0	6+ 0 = 6 *	6
2	2	0	10	0	10 +0 = 10 *	10
3	3	0	13	0	13 + 0 =13*	13
4	4	4	15	0	15 + 0 =15*	15
5	5	0	16	0	16 + 0= 16*	16
6	6	0	18	0	18 + 0 =18*	18
7	7	0	21	0	21+ 0 = 21*	21
8	8	0	22	0	22+ 0 = 22*	22
9	9	0	25	0	25 + 0= 25*	25

المرحلة الثانية : المقلع الثاني

عدد ساعات العمل المتبقية في بداية المرحلة الحالية ε_1	عدد ساعات العمل الممكن استغلالها في هذه المرحلة X_2	ساعات العمل المتبقية للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - x_2$	قيمة الأجر المحصل عليه في هذه المرحلة $f_2(x_2)$	قيمة أكبر أجر محصل عليه حتى المرحلة اللاحقة $Z_3^{max}(\varepsilon_2)$	قيمة الأجر المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $f_{2(X_2)} + Z_3^{max}(\varepsilon_2)$	قيمة أعظم أجر محصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_2^{max}(\varepsilon_1)$
0	0	0	0	0	0 + 0 = 0 *	0
1	0 1	1 0	0 7	6 0	0 + 6= 6 7 + 0 = 7 *	7
2	0 1 2	2 1 0	0 7 9	10 6 0	0 + 10 = 10 7 + 6 = 13 * 9 + 0 = 9	13
3	0	3	0	13	0 + 13 = 13	17

	1 2 3	2 1 0	7 9 11	10 6 0	7 + 10 = 17* 9 + 6 = 15 11 + 0 = 11	
4	0 1 2 3 4	4 3 2 1 0	0 7 9 11 13	15 13 10 6 0	0 + 15 = 15 7+ 13 = 20 * 9 + 10 = 19 11 + 6 = 17 13 + 0 = 13	20
5	0 1 2 3 4 5	5 4 3 2 1 0	0 7 9 11 13 16	16 15 13 10 6 0	0+16 = 16 7+15 = 22* 9+13 = 22* 11+10 = 21 13+6 =19 16+0 =16	22

6	0	6	0	18	0+18 =18	24
	1	5	7	16	7+16 =23	
	2	4	9	15	9+15 =24	
	3	3	11	13	11+13 =24*	
	4	2	13	10	13+10 =23	
	5	1	16	6	16+6 =22	
	6	0	19	0	19+0 =19	
7	0	7	0	21	0+21 = 21	26
	1	6	7	18	7+18 = 25	
	2	5	9	16	9+16 = 25	
	3	4	11	15	11+15 = 26*	
	4	3	13	13	13+13 = 26*	
	5	2	16	10	16+10 = 26*	
	6	1	19	6	19+6 = 25	
	7	0	21	0	0+21 = 21	
8	0	8	0	22	0+22 = 22	29
	1	7	7	21	7+21 = 28	

	2	6	9	18	9+18 = 27	
	3	5	11	16	11+16 = 27	
	4	4	13	15	13+15 = 28	
	5	3	16	13	16+13 = 29*	
	6	2	19	10	19+10 = 29*	
	7	1	21	6	21+6 = 27	
	8	0	22	0	22+0 = 22	
9	0	9	0	25	0+25=25	32
	1	8	7	22	7+22=29	
	2	7	9	21	9+21=30	
	3	6	11	18	11+18=29	
	4	5	13	16	13+16=29	
	5	4	16	15	16+15=31	
	6	3	19	13	19+13=32*	
	7	2	21	10	21+10=31	
	8	1	22	6	22+6=28	
	9	0	25	0	25+0=25	

المرحلة الأولى: المقلع الأول

قيمة أعظم أجر محصل عليه حتى المرحلة الحالية $Z_1^{max}(\varepsilon_0)$	قيمة الأجر المحصل عليه حتى المرحلة الحالية $f_1(x_1) + Z_2^{max}(\varepsilon_1)$	قيمة أكبر أجر محصل عليه حتى المرحلة اللاحقة $Z_2^{max}(\varepsilon_1)$	قيمة الأجر المحصل عليه في هذه المرحلة $f_1(x_1)$	ساعات العمل المتبقية للمرحلة اللاحقة $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - x_1$	عدد ساعات العمل الممكن استعمالها في هذه المرحلة X_1	عدد ساعات العمل المتبقية في بداية المرحلة الحالية ε_0
0	0 + 0 = 0 *	0	0	0	0	0
7	0 +7= 7 5 +0 = 5 *	7 0	0 5	1 0	0 1	1
12	0 + 13 = 13 5 + 7 = 12 * 9 +0= 9	13 7 0	0 5 9	2 1 0	0 1 2	2
18	0 + 17 = 17 5 + 13 = 18* 9 + 7 = 16 12 +0 = 12	17 13 7 0	0 5 9 12	3 2 1 0	0 1 2 3	3
22	0 + 20 = 20 7+ 17 = 22 * 9+13 = 22* 12 +7 = 19	20 17 13 7	0 5 9 12	4 3 2 1	0 1 2 3	4

	4	0	14	0	14 + 0 = 14	
5	0	5	0	22	0+22 = 22	26
	1	4	5	20	5+20 = 25	
	2	3	9	17	9+17 = 26*	
	3	2	12	13	12+13 =25	
	4	1	14	7	14+7 =21	
	5	0	15	0	15+0 =15	
6	0	6	0	24	0+24 =18	29
	1	5	5	22	5+22 = 27	
	2	4	9	20	9+ 20 = 29 *	
	3	3	12	17	12+17 = 29*	
	4	2	14	13	14+13 = 27	
	5	1	15	7	15+ 7 = 22	
	6	0	18	0	18+0 =18	
7	0	7	0	26	0 + 26 = 26	32
	1	6	5	24	5 + 24= 29	
	2	5	9	22	9 + 22 = 31	
	3	4	12	20	12+20 = 22*	
	4	3	14	17	14+17 = 31	
	5	2	15	13	15+13 = 28	
	6	1	18	7	18+7 = 25	
	7	0	20	0	20+0 = 20	
8	0	8	0	29	0+29 = 29	34
	1	7	5	26	5+26 = 31	
	2	6	9	24	9+24 = 33	

	3	5	12	22	12+22= 34*	
	4	4	14	20	14+20= 34*	
	5	3	15	17	15+17= 32	
	6	2	18	13	18+13 = 31	
	7	1	20	7	20+7 = 27	
	8	0	24	0	24+0 = 24	
9	0	9	0	32	0+ 32 = 32	36
	1	8	5	29	5+ 29 = 34	
	2	7	9	26	9+ 26= 35	
	3	6	12	24	12+24= 36	
	4	5	14	22	14+ 12 = 36	
	5	4	15	20	15+ 20 =35	
	6	3	18	17	18+17 = 35	
	7	2	20	13	20+13 =33	
	8	1	24	7	24+ 7 = 31	
	9	0	27	0	27+ 0 = 27	

لقد عرفنا الآن الكمية الإجمالية القصوى من الحصى التي يمكن للمؤسسة استخراجها من المقالع الثلاثة في الحالات التالية:

- إذا كان عدد الكاسرات المتوفرة في بداية المرحلة الأولى (في المقلع الأول) هو 9 كاسرات، فإن الكمية القصوى من الحصى المستخرج من المناجم الثلاثة يكون 36 طن.

- إذا كان عدد الكاسرات المتوفرة في بداية المرحلة الأولى (في المقلع الأول) هو 8 كاسرات فقط، فإن أقصى ما يمكن استخراجه من الحصى في هذه الحالة من المناجم الثلاثة هو 34 طن.

- أما إذا كان عدد الكاسرات المتوفرة في بداية المرحلة الأولى (في المقلع الأول) هو 7 كاسرات، فإن كمية الحصى الممكن استخرجها في هذه الحالة هي 32 طن.

- وهكذا نستمر في سرد كل حالات استخدام الكاسرات إلى أن نصل إلى حالة استخدام كاسرة واحدة فقط، وفي هذه الحالة فإن كمية الحصى المستخرج ستكون 7 طن.

نتعرض إلى تفصيل مختلف الحالات، حتى نوضح ما هو عدد الكاسرات التي يجب توفيرها في كل منجم وما هي كمية الحصى القصوى التي ينمن استخراجها من كل منجم.

الحالة الأولى: إذا كان عدد الكاسرات المتوفرة في المقلع الأول هو9:

توزيع الكاسرات على المقالع وكمية الحصى المستخرج تكون كالتالي:

المقلع	عدد الكاسرات المتاحة للمقلع الحالي ε_{k-1}	أقصى كمية من الحصى مستخرجة حتى هذه المرحلة $Z_k^{max}(\varepsilon_k - 1)$	عدد الكاسرات المستعملة في هذه المرحلة X_K	كمية الحصى المستخرجة في هذه المرحلة $f_k(x_k)_{max}$	عدد الكاسرات المتبقي للمراحل اللاحقة ε_k
I	9	36	3	12	9 –3=6
II	6	24	2	9	6–2=4
III	4	15	4	15	4–4=0
	$\sum$		9	36	

إذن إذا كان عدد الكاسرات الممكن توفيره للمنجم الأول هو 9، فإن المؤسسة تستطيع استخراج كمية قصوى من الحصى مقدارها 36 طن من المناجم الثلاثة، وذلك بتخصيص 3 كاسرات للمقلع الأول، كاسرتين لثاني و4 كاسرات للمقلع الثالث. وتكون الكمية القصوى من الحصى المستخرجة من المقلع الأول هي 12 طن ومن المقلع الثاني كمية قصوى مقدارها 9 طن ومن الثالث 15 طن، بمجموع يساوي 36 طن.

يمكن أن نحصل أيضا على كمية قصوى من الحصى مقدارها 36 طن من المقالع الثلاثة إذا ما خصصنا للمقلع الأول 4 كاسرات، للمقلع التاني كاسرة واحدة و4كاسرات للمقلع الثالث، وذلك كالتالي:

المقلع	عدد الكاسرات المتاحة للمقلع الحالي ε_{k-1}	أقصى كمية من الحصى مستخرجة حتى هذه المرحلة $Z_k^{max}(\varepsilon_k - 1)$	عدد الكاسرات المستعملة في هذه المرحلة (في المقلع) X_K	كمية الحصى المستخرجة في هذه المرحلة $f_k(x_k)_{max}$	عدد الكاسرات المتبقي للمراحل اللاحقة ε_k
I	9	36	4	14	9–4=5
II	5	22	1	7	5–1=4
III	4	15	4	15	4–4=0
	$\sum$		9	36	

وهناك إمكانيات أخرى لتوزيع الكاسرات من أجل الحصول على إنتاج أقصى مقداره 36 طن.

الحالة الثانية: إذا كان عدد الكاسرات المتوفرة في المقلع الأول هو 8:

إذا كان عدد الكاسرات المتوفر منذ البداية هو 8 فقط، فإنه في هذه الحالة كمية الحصى القصوى الممكن استخراجها من المقالع الثلاثة تصل إلى 34 طن. في هذه الحالة يكون جدول التوزيع الأمثل كالتالي:

المقلع	عدد الكاسرات المتاحة للمقلع الحالي ε_{k-1}	أقصى كمية من الحصى مستخرجة حتى هذه المرحلة $Z_k^{max}(\varepsilon_k - 1)$	عدد الكاسرات المستعملة في هذه المرحلة X_K	كمية الحصى المستخرجة في هذه المرحلة $f_k(x_k)_{max}$	عدد الكاسرات المتبقي للمراحل اللاحقة ε_k
I	8	34	3	12	8–3= 5
II	5	22	1	7	5–1=4
III	4	15	4	15	4–4=0
	$\sum$		9	36	

وهكذا نستطيع سرد سبع حالات أخرى لتوزيع الكاسرات على المقالع، بكميات حصى قصوى مستخرجة مختلفة.

II – مسألة استبدال (تعويض) التجهيزات الإنتاجية:

إن واحدة من أهم المسائل الاقتصادية التي نصادفها في الحياة الاقتصادية هي مسألة تحديد الإستراتيجية المثلى لتعويض وسائل الإنتاج القديمة (المستعملة) مثل آلات، التجهيزات،.. وغيرها. بعبارة أخرى تعويض وسيلة إنتاجية قديمة بأخرى جديدة.

إن تقادم الآلات و التجهيزات الإنتاجية بمرور الزمن يجد مصدره في الاهتلاك الفيزيائي والمعنوي الناتج عن ظروف وشروط استعمال هذه التجهيزات، نتيجة لذلك تزداد تكاليف الإنتاج باستعمال هذه الآلات و يرجع ذلك لزيادة مصاريف استغلال وصيانة هذه الآلات، كما تنخفض إنتاجيتها وقيمتها المسترجعة في نهاية عمرها الإنتاجي.

يحين الوقت الذي يجب فيه استبدال التجهيزات القديمة بأخرى جديدة وتكون هذه العملية أكثر منفعة وأكثر فائدة من مواصلة استعمال الآلات القديمة بتكاليف متصاعدة، التجهيزات القديمة يمكن استبدالها بأخرى جديدة من نفس النوع أو بتجهيزات أكثر تطورا من الناحية التقنية.

الإستراتيجية المثلى لتعويض التجهيزات الإنتاجية تتمثل في تحديد الآجال المثلى لاستغلال التجهيزات القديمة.

1 – مقياس الأمثلية المعتمد لاتخاذ القرار:

مقياس الأمثلية المعتمد في اتخاذ قرار تحديد آجال الاستبدال يمكن أن يكون الربح المحقق من استغلال هذه التجهيزات أو تدنيه تكاليف استغلالها في خلال مدة معينة.

إن أهم خاصية يتخذ على أساسها قرار استبدال الآلات هو **عمرها الإنتاجي** (درجة قدمها)، لأن هذا العامل هو الذي يحدد تكاليف الاستغلال، تكاليف الإنتاج، إنتاجية العمل، قيمة استرجاع التجهيزات نفسها، فهو يحدد مستوى مردود دية استعمال هذه الآلات وبالتالي مستوى الأرباح الممكن الحصول عليها. كلما زاد العمر الإنتاجي للآلات كلما زادت تكاليف الاستغلال وانخفض مستوى الأرباح.

نموذج البرمجة الديناميكية يوفر الجهاز الأمثل لحل مسائل الاستبدال أو التعويض، ومن أجل إمكانية استعماله نعتبر أن عملية الاستبدال هي مسألة متعددة المراحل (الخطوات) وذلك بتقسيم الفترة التي نريد أن ندرس فيها استغلال التجهيزات إلى أجزاء زمنية (سنوات، فصول... وغيرها) رقمها هو k وعددها هو n ونعتبر أن قرار الاستبدال يتخذ في **بداية كل سنة**.

2– متغير الحالة X_k:

في بداية كل سنة إذن يتخذ قرار إما بالاحتفاظ بالآلات القديمة أو بتعويضها، لذلك فمتغير الحالة في خلال كل مرحلة k (سنة مثلا) وهو X_k يأخذ شكلين فقط (ينحصر في إمكانيتين فقط): "قرار الاحتفاظ بالتجهيزات القديمة

يمثله متغير الحالة x_1" و"القرار البديل (استبدالها بأخرى جديدة) يمثله متغير الحالة x_2".

3 -دالة الهدف $f_k x_k$:

نتيجة لأن متغير الحالة خلال كل مرحلة يمكن أن يأخذ قيمتين فقط (X_2 , X_1)، فإن دالة الهدف $f_K(x_k)$ خلال كل مرحلة (سنة) تأخذ أيضا قيمتين فقط:

$$f_k(x_k) = \begin{cases} f_k^{x_1} \ldots\ldots \rightarrow x_1 \\ f_k^{x_2} \ldots\ldots \rightarrow x_2 \end{cases}$$

أي أنها تعكس قيمة الربح الأقصى (أو التكاليف الدنيا) الممكن الحصول عليها في خلال مرحلة ما إذا ما اتخذ القرار بالاحتفاظ بالآلات القديمة حالة (x_1)، أو تعكس قيمة الربح الأقصى (التكاليف الدنيا) المحققة في خلال السنة المعنية، إذا ما اتخذ قرار باستبدالها (حالة x_2). ويكون الحل الأمثل في خلال كل مرحلة يتمثل في حساب قيمتي دالة الهدف $f_k^{x_2}$, $f_k^{x_1}$ واختيار أكبرهما أو (أقلهما) حسب حالة التعظيم أو التدنية.

نفترض أننا نقوم باستغلال تجهيزات إنتاجية خلال فترة تتكون من n سنة إذا كان معروفا ما يلي:

P – القيمة الابتدائية للتجهيزات

f_t – قيمة الإنتاج السنوي المحصل عليه باستعمال تجهيزات ذات العمر t سنة.

r_t– تكاليف الإنتاج السنوية باستعمال الآلات ذات عمر (t) سنة.

$\wp(t)$– القيمة المسترجعة للتجهيزات ذات العمر (t) سنة في حالة التخلي عنها.

تقسم عملية الاستغلال إلى(n) مرحلة (خطوة) بحيث كل مرحلة (k) تمثل سنة الاستغلال رقم k: ‎(k=1,..., n)‎.

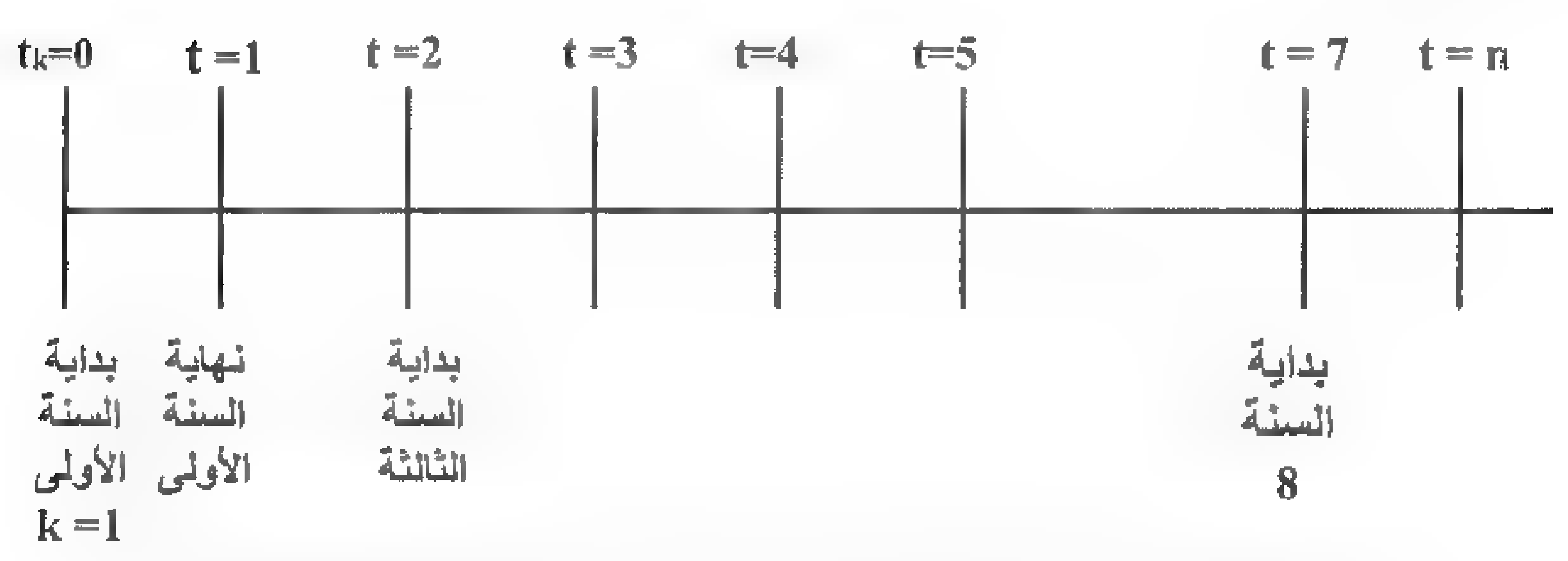
متغير الحالة (x_k) كما اشرنا إلى ذلك أعلاه يمكن أن يأخذ اتجاهين فقط x_1, x_2.

بحيث: x_1 – يعني قرار الاحتفاظ بالتجهيزات القديمة وموصلة استعمالها.

X_2– قرار تعويض التجهيزات القديمة.

متغير الوضعية t_k: وضعية الآلات كما أشرنا أعلاه، يميزها بالخصوص عمرها الإنتاجي، لذلك فإن متغير الوضعية في هذه المسألة هو العمر الإنتاجي للتجهيزات.

نعتبر أنه في بداية الفترة الأولى (بداية السنة الأولى) k=1، العمر الإنتاجي للآلات هو t= 0 سنة.



إذا كانت وضعية الآلات في بداية سنة من السنوات (k) مثلا يميزها عمرها الإنتاجي (t_k)، وتم في بداية هذه السنة اتخاذ قرار الاحتفاظ بها وعدم استبدالها (القرار x_1) فإن الوضعية العمرية لهذه الآلات في نهاية هذه السنة تتحول إلى $t_{k+1} = (t_k) + 1$، أي أن عمر الآلات يزداد ب1 سنة، أما إذا ما اتخذ في بداية هذه السنة قرار باستبدالها (القرار x_2)، فإن الوضعية العمرية تتحول في نهاية هذه

السنة إلى الوضعية $t_{k+1} = 1$ وهذا يعني أن الاستبدال تم في بداية السنة k أما في نهايتها فإن عمر الآلات الجديدة يصبح يساوي 1سنة.

بمعنى في بداية السنة الموالية (k+1) متغير الوضعية يصبح $t_{k+1} = (t_k)$ +1أو $t_{k+1} = 1$ على حسب القرار المتخذ في بداية السنة k، لذلك فإن متغير الوضعية في بداية أي سنة k، ماعدا السنة الأولى، يمكن أن يأخذ القيم من 1 إلى k-1 سنة.

مثلا: في بداية السنة الثالثة، عمر الآلة يمكن أن يكون 2 سنة إذا ما لم يتم استبدال هذه الآلات منذ بداية السنة الأولى، ويمكن أن يكون =1 سنة في حالة ما إذا تم استبدالها في بداية السنة الماضية، كما يمكن أن يكون محصورا في المجال بينهما أي: $1 \leq t_k \leq k-1$.

قيمة دالة الهدف $\left(f_K^X\right)$ خلال مرحلة ما (k) تأخذ كما أشرنا سابقا، قيمتين على حسب القرار المتخذ x_2, x_1.

إذا ما تم اتخاذ القرار (x_1) خلال المرحلة k، فإنه باستعمال الآلات القديمة سوف يتم الحصول على إنتاج بقيمة f (t)، الشيء الذي يتطلب تحمل تكاليف بقيمة r(t) لذلك فإن دالة الهدف (دالة الربح مثلا) ستكون:

$$f_t^{x_1} = f(t) - r(t)$$

أما إذا ما اتخذ القرار بالتعويض (x_2) في بداية هذه المرحلة، فإننا نحصل على دخل قيمته $\wp(t)$ الناتج عن بيع الآلات القديمة (قيمة الاسترجاع) f(0) + وهي قيمة الناتج المحصل عليه باستعمال الآلة الجديدة خلال هذه السنة، مطروح من

لمجموع تكاليف شراء الآلات الجديدة (p) وتكاليف الإنتاج خلال هذه السنة باستعمال الآلات الجديدة r(0).

لذلك فإن دالة الهدف (دالة الربح مثلا) في هذه الحالة تكون:

$$f_k^{X2} = \wp(t) + f(0) - p - r(0)$$

أ – إذا كانت إستراتيجية الاستبدال تهدف إلى **تعظيم العائد المالي** (الربح مثلا) من نشاط المؤسسة، فإن القيمة العظمى لدالة الهدف Z_K^{MAX} خلال هذه المرحلةk تساوي:

$$z_k^{\max}(t_k) = \max\begin{cases} f_k^{X_1} = f(t) - r(t) & \Rightarrow x_1 \\ f_k^{X_2} = \wp(t) + f(0) - p - r(0) & \Rightarrow x_2 \end{cases}$$

من أجل تحديد الإستراتيجية المثلى لاستغلال التجهيزات الإنتاجية المعطاة لا يكفي أن نعرف القيمة المثلى لدالة الهدف خلال كل مرحلة (كل سنة) على حدة ثم جمع هذه القيم، بل يجب تحديد قيمة دالة الهدف خلال كل مرحلة بالاعتماد على قيمتها في المراحل الأخرى السابقة، لذلك نبدأ الحساب من الخلف (من المرحلة الأخيرة).

القيمة العظمى لدالة الهدف الممكن الحصول عليها حتى المرحلة الأخيرة (n) يساوي:

$$z_n^{\max}(t_n) = \max\begin{cases} f(t) - r(t) \to x_1 \\ \wp(t) + f(0) - p - r(0) \to x_2 \end{cases}$$

نظرا لأن: $z_{n+1}^{\max}(t_{n+1}) = 0$

القيمة العظمى لدالة الهدف الممكن الحصول عليها حتى المرحنة الأخيرة (n-1) تكون:

$$z_{n-1}^{\max}(t_{n-1}) = \max\begin{cases} f(t_{n-1}) - r(t_{n-1}) + z_n^{\max}(t_n) \;\ldots\ldots\; \to x_1 \\ \wp(t_{n-1}) - f(0) - p - r(0) + z_n^{\max}(t_n = 1) \;\ldots\ldots\; \to x_2 \end{cases}$$

قيمة $z_n^{max}(t_n = 1)$ – تعني القيمة العظمى لدالة الهدف المحصل عليها حتى السنة n، إذا كان عمر الآلات في بداية السنة n كان يساوي 1 سنة.

بمعنى أن هذه الآلة تم تجديدها في بداية هذه السنة، أي السنة(n-1) التي نحن بصددها وهكذا حتى المرحلة الأولى: أي نحسب

$z_1^{max}(t_1)\ , z_2^{max}(t_2), \cdots,\ z_{n-1}^{max}(t_{n-1})\ ,\ z_n^{max}(t_n)$.

$z_1^{max}(t_1)$ – القيمة العظمى لدالة الهدف المحصل عليها من استغلال الآلات حتى بداية الفترة (أي حتى السنة الأولى) عندما يكون $t = 0$.

ب – إذا كانت إستراتيجية الاستبدال تعتمد ليس على تعظيم دالة الهدف(تعظيم العائد) من استغلال الآلات ولكن على تحقيق أقل تكلفة من هذا الاستغلال، أي إذا كان المطلوب هو: تحديد الآجال المثلى لاستبدال الآلات القديمة بالجديدة خلال فترة استغلال مداها(n) سنة، من أجل تحقيق أدنى تكلفة استغلال ممكنة.

دالة الهدف في هذه الحالة هي: $\min\left\{ f_k^{x_1}\ ,\ f_k^{x_2} \right\}$.

قيمة هذه الدالة خلال كل سنة (k) تعتمد كما رأينا في الحالة السابقة على القرار المتخذ بالاحتفاظ(x_1) أو باستبدال(x_2).

عندما يتخذ قرار بالاحتفاظ فإن قيمة دالة الهدف خلال سنة(k)تكون: $f_k^{x_1} = r(t)$، أي قيمة تكاليف الاستغلال خلال هذه السنة، أما عند اتخاذ القرار (x_2) فإن قيمة دالة الهدف تكون: $f_k^{x_2} = p_k + r(0) - \wp(t)$

حيث أن:

p – هي القيم الابتدائية للآلات

$\wp(t)$ – هي قيمة الاسترجاع بعد البيع

r (0)– تكاليف الاستغلال خلال السنة الأولى (عندما t = 0).

إذا بدأنا الحساب من الخلف، فإن قيمة التكاليف الدنيا المحققة حتى السنة n هي:

$$z_n^{\min}(t_n) = \min\begin{cases} r(t)........ \rightarrow x_1 \\ p_n + r(0) - \wp(t)........ \rightarrow x_2 \end{cases}$$

لأن $z_{n+1}^{\min}(t_{n+1}) = 0$

أما قيمة التكاليف الدنيا حتى السنة n-1 وهي: $z_{n-1}^{\min}(t_{n-1})$ فتكون:

$$z_{n-1}^{\min}(t_{n-1}) = \min\begin{cases} r(t_{n-1}) + z_n^{\min}(t_n = t_{+1})....... \rightarrow x_1 \\ p_{n-1} + r(0) - \wp(t_{n-1}) + z_n^{\min}(t_{n=1})...... \rightarrow x_2 \end{cases}$$

مثال 1:

اشترت مؤسسة ما تجهيزات إنتاجية من أجل استعمالها في نشاطها خلال فترة مداها خمس سنوات (n=5). تريد المؤسسة تحديد الإستراتيجية المثلى لاستعمال هذه الآلة خلال هذه المدة التي تسمح لها بتعظيم أرباحها الكلية خلال هذه الفترة. القيمة الحالية للإنتاج السنوي f(t) المحصل عليه بواسطة هذه التجهيزات وكذلك التكاليف السنوية للاستغلال r(t) معطاة في الجدول التالي:

السنوات K_i	العمر الإنتاجي للتجهيزات في بداية السنة t_K	قيمة الإنتاج السنوي f(t) (و.ن.)	قيمة التكاليف السنوية r(t) (و.ن.)
1	0	80	20
2	1	75	25
3	2	65	30
4	3	60	35
5	4	60	45

مع العلم أن القيمة الابتدائية للتجهيزات الجديدة المماثلة لهذه التجهيزات هي$P = 40$ و.ن.، وأن التجهيزات المشتراة ليس لها قيمة استرجاع.

الحل:

المرحلة الخامسة (السنة رقم5)

مجال تعير عمر التجهيزات خلال السنة الخامسة t_5	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\left\{\begin{matrix} f_5^{x_1} \\ f_5^{x_2} \end{matrix}\right\}$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 6 $t_6 \left\{\begin{matrix} x_1 \rightarrow t_5+1 \\ x_2 \rightarrow t_5=1 \end{matrix}\right\}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $z_6^{max}(K_6)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_6(K_6)+f_5^{\lambda}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_5^{max}(K_5)$
1	75 – 25 = 50 80 – 20 – 40 = 20	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	0	50 + 0 =50 * 20+0=20	50
2	65 – 30= 35 80 -20 – 40= 20	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	0	35+0= 35 * 20+0= 20	35
3	60 – 35= 25 80 -20 – 40= 20	3 + 1 = 4 0 + 1 = 1	0	25+0= 25 * 20+0= 20	25
4	60 – 45 = 15 80 -20 – 40= 20	4 + 1 = 5 0 + 1 = 1	0	15+0= 15 20+0= 20 *	20

المرحلة الرابعة (السنة رقم 4):

مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة الخامسة t_4	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\left\{ \begin{matrix} f_4^{x_1} \\ f_4^{x_2} \end{matrix} \right\}$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 6 $t_5 \left\{ \begin{matrix} x_1 \rightarrow t_4 + 1 \\ x_2 \rightarrow t_4 = 1 \end{matrix} \right\}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $z_5^{max}(K_5)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_5(K_5) + f_4^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_4^{max}(K_4)$
1	75 – 25 = 50 80 – 20 – 40 = 20	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	35 50	35 + 50 =85 * 20+50=70	85
2	65 – 30= 35 80 -20 – 40= 20	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	25 50	25+35= 60 50+20= 70 *	70
3	60 – 35= 25 80 -20 – 40= 20	3 + 1 = 4 0 + 1 = 1	20 50	20+25= 45 20+50= 70 *	70

المرحلة الثالثة (السنة رقم 3)

مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة الخامسة t_3	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{Bmatrix} f_3^{x_1} \\ f_3^{x_2} \end{Bmatrix}$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 6 $t_4 \begin{Bmatrix} x_1 \to t_3+1 \\ x_2 \to t_3=1 \end{Bmatrix}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $z_4^{max}(K_4)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_4(K_4)+f_3^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_3^{max}(K_3)$
1	75 – 25 = 50 80 – 20 – 40 = 20	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	70 85	70 +50 =120 * 85+20= 105	120
2	65 – 30= 35 80 -20 – 40= 20	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	70 85	70+35= 105 * 85+20= 105 *	105

المرحلة الثانية (السنة رقم 2)

قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_2^{\max}(K_2)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_3(K_3)+f_2^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $Z_3^{\max}(K_3)$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 6 $t_3\begin{Bmatrix} x_1 \to t_2+1 \\ x_2 \to t_2=1 \end{Bmatrix}$	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{Bmatrix} f_2^{x_1} \\ f_2^{x_2} \end{Bmatrix}$	مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة الخامسة t_2
155	**105+50=155 * 120+20= 140**	**105 120**	**1 + 1 = 2 0 + 1 = 1**	**75 – 25 = 50 80 – 20 – 40 = 20**	**1**

المرحلة الأولى (السنة رقم 1)

قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_1^{max}(K_1)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_2(K_2)+f_1^{X}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $z_2^{max}(K_2)$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 6 $t_2 \begin{cases} x_1 \to t_2+1 \\ x_2 \to t_2=1 \end{cases}$	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\left(f_1^{X_2}\right)$	مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة الخامسة t_1
175	155+20 =175	155	0 + 1 = 1	80 – 20 – 40 = 20	0

القيمة القصوى للأرباح الكلية التي يمكن للمؤسسة أن تحصل عليها خلال الخمس سنوات من استغلال هذه التجهيزات هي= 175 $z_1^{max}(\kappa_1)$.

هذه الأرباح تحصل عليها إذا اتخذت قرارا بالاستبدال في بداية السنة الأولى (قرار X_2) وتكون قيمة الأرباح القصوى خلال هذه السنة – 20 و.ن.

في بداية السنة الثانية عمر التجهيزات يكون 1 سنة. وإذا كان عمرها في بداية هذه السنة هو 1 سنة فإن الربح الأقصى الممكن الحصول عليه حتى هذه السنة يكون 155و.ن.، وذلك باتخاذ القرار(X_1) بالاحتفاظ بالتجهيزات. مع العلم أن الربح الأقصى المحصل عليه خلال هذه السنة وحدها يساوي 50و.ن.

في بداية السنة الثالثة عمر التجهيزات يكون 2 سنة، هذا العمر الإنتاجي يسمح للمؤسسة الحصول على ربح أقصى مقداره 105و.ن. وذلك باتخاذ قرار (X_1) أو قرار (X_2) بالاستبدال أو بالاحتفاظ بالتجهيزات. وإذا اتخذت قرار الاحتفاظ (X_1) فإن الربح الذي تحققه المؤسسة في هذه السنة وحدها فيساوي 35و.ن.

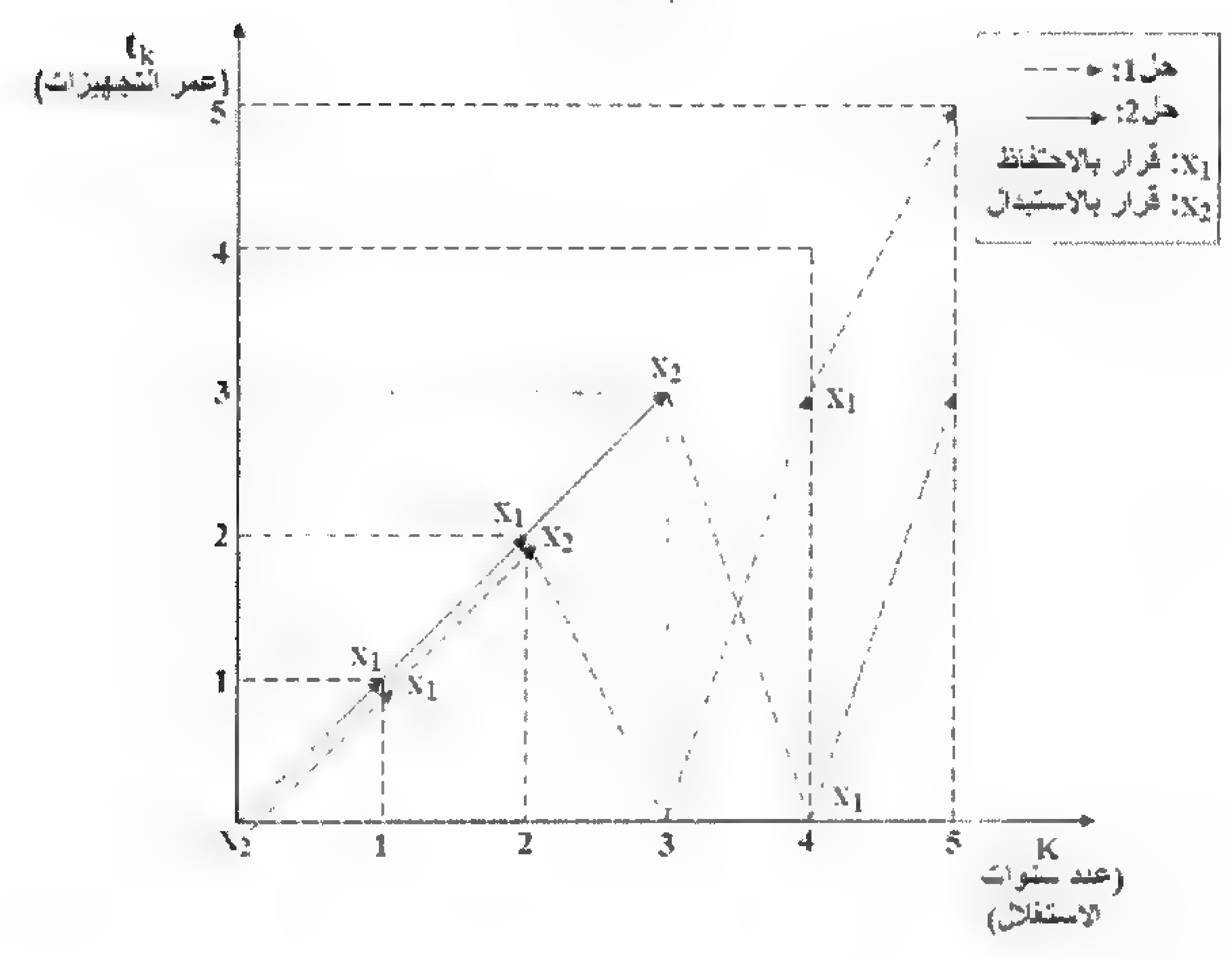
في بداية السنة الرابعة عمر التجهيزات سيكون 3 سنة، هذا العمر الإنتاجي يتيح للمؤسسة الحصول على ربح أقصى مقداره 70و.ن حتى هذه السنة، وذلك باتخاذ القرار (X_2) باستبدال التجهيزات ويكون الربح الأقصى المحقق في هذه السنة وحدها هو 20 و.ن.

في بداية السنة الخامسة عمر التجهيزات يكون 1سنة، على أساس قرار الاستبدال الذي اتخذ في السنة الماضية (الرابعة). وإذا كان عمرها في بداية هذه السنة هو 1سنة فإن الربح الأقصى الممكن الحصول عليه حتى هذه السنة يكون 50و.ن.، وذلك باتخاذ القرار (X_1) بالاحتفاظ بالتجهيزات. مع العلم أن الربح الأقصى المحصل عليه خلال هذه السنة وحدها يساوي 50و.ن.

في الخلاصة إذا ما جمعنا الأرباح القصوى المحصل عليها خلال الخمس سنوات فنجدها تساوي:

$$20 + 50 + 35 + 20 + 50 = 175$$ و.ن

رسم شكل11



مثال 2:

في بداية فترة زمنية ما اشترت مؤسسة تجهيزات إنتاجية جديدة، وتريد تحديد الإستراتيجية المثلى لاستغلال هذه الآلات، أي تحديد السياسة المثلى الواجب إتباعها في بداية كل سنة والمتمثلة في استبدال أو الاحتفاظ بهذه الآلات بهدف تحقيق أقصى ربح كلي ممكن خلال 10 سنوات (K = 1 ,......,n). هذه التجهيزات، بناءا على إحصائيات الإنتاج باستعمال تجهيزات مماثلة في فترات

سابقة، تمكن المؤسسة من الحصول على إنتاج متوقع P(t) وتتحمل مقابله تكاليف r(t) قيمهما خلال عشر سنوات موضحة في الجدول التالي:

السنوات K_i	العمر الإنتاجي للتجهيزات في بداية السنة t_K	قيمة الإنتاج السوي f(t) (و.ن.)	قيمة التكاليف السنوية r(t) (و.ن.)
1	0	25	15,07
2	1	24	15,01
3	2	24	15,94
4	3	23	16,11
5	4	23	16,93
6	5	23	16,86
7	6	22	17,96
8	7	21	18
9	8	20	19,11
10	9	20	19,86

القيمة الابتدائية للتجهيزات هي: $C = 10$ و.ن.، وهذه التجهيزات ليس لها قيمة استرجاعية، أي أن: $\varphi(t)= 0$.

الحل:

هذه المسألة تتعلق باستغلال التجهيزات المعنية لمدة تساوي 10سنوات. فنقسم نشاطها إلى عشر مراحل، كل مرحلة تشكل سنة $(K = 1 ,....,n)$.

وضعية التجهيزات في بداية كل سنة يحددها العمر الانتاجي لها وهو (t_K).

متغير الحالة (X_K) يتمثل في القرار المتخذ في بداية كل سنة (مرحلة) والذي يأخذ شكلين فقط:

X_1: الاحتفاظ بالتجهيزات أو X_2: استبدالها بأخرى جديدة.

بناءا على ذلك دالة الهدف (دالة الأرباح) الممكن الحصول عليها خلال كل مرحلة تأخذ قيمتين فقط:

$$\left(f_K^{X_1}\right)=f(t) - r(t) \text{ أو } \left(f_K^{X_2}\right)=f(0) - r(0) - C$$

القيمة المثلى لهذه الدالة خلال كل مرحلة هي الاختيار بين أعلى القيمتين $\left(f_1^{X_1}\right)$ أو $\left(f_1^{X_2}\right)$ بالأخذ بعين الاعتبار القيمة المثلى لدالة الهدف حتى المرحلة اللاحقة$(K + 1)$.أي :

$$Z_K^{\max}(t_K)=\max\begin{cases} f(t) - r(t)+z_{K+1}^{\max}(t_{K+1})\ldots\to X_1 \\ f(0)- r(0)- c + z_{K+1}^{\max}(t_{K+1})\ldots\to X_2\end{cases}$$

من أجل حل هذه المسألة نبدأ الحساب من الخلف، أي من المرحلة$n=10$.

الربح الأقصى الممكن الحصول عليه حتى السنة العاشرة هو:

$$Z_{10}^{\max}(t_{10})=\max\begin{cases} f(10) - r(10) + z_{11}^{\max}(t_{11})\ldots\to X_1 \\ f(0) - r(0) - c + z_{11}^{\max}(t_{11})\ldots\to X_2\end{cases}$$

نظرا لأن: $z_{11}^{\max}(t_{11}) = 0$ ، فإن:

$$Z_{10}^{\max}(t_{10})=\max\begin{cases} f(10) - r(10) \ \ldots\to X_1 \\ f(0) - r(0) - c \ldots\to X_2\end{cases}$$

بما أن التجهيزات في بداية السنة الأولى يكون عمرها $t_1= 0$ سنة، فإن عمرها في بداية السنة العاشرة (t_{10}) يمكن أن يتراوح بين $1\leq t_{10}\leq 9$ سنة. أي أن التجهيزات في بداية السنة العاشرة يمكن أن يكون عمرها سنة واحدة إذا ما تم استبدالها في السنة التاسعة، أو يكون عمرها في أقصى حد 9 سنوات إذا ما لم يتم استبدالها أصلا منذ السنة الأولى.

المرحلة العاشرة (السنة رقم 10)

مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة العاشرة t_{10}	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\left\{ \begin{array}{l} f_0^{x_1} \\ f_{10}^{x_2} \end{array} \right\}$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 11 $t_{11} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \to t_{10}+1 \\ x_2 \to t_{10}=1 \end{array} \right\}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $Z_{11}^{max}(K_{11})$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_{11}(K_{11}) + f_{10}^{X}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_{10}^{max}(K_{10})$
1	24 –15,01 = 8,99 25 – 15.07 -10 = -0,07	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	0 0	8,89 + 0 =8,89 * -0,07+0= - 0,07	8,89
2	8,06 - 0,07	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	0 0	8,6+0= 8,6 * -0,07+0= - 0,07	8,06
3	6,89 - 0,07	3 + 1 = 4 0 + 1 = 1	0 0	6,89+0= 6,89 * -0,07+0= - 0,07	6,89
4	6,07 - 0,07	4 + 1 = 5 0 + 1 = 1	0 0	6,07+0= 6,07 * -0,07+0= - 0,07	6,07
5	6,14 - 0,07	5 + 1 = 6 0 + 1 = 1	0 0	6,14+0= 6,14* -0,07+0= - 0,07	6,14
6	4,04 - 0,07	6 + 1 = 7 0 + 1 = 1	0 0	4,04+0= 4,04* -0,07+0= - 0,07	4,04
7	3 - 0,07	7 + 1 = 8 0 + 1 = 1	0 0	3 +0= 3* -0,07+0= - 0,07	3
8	0,89 - 0,07	8 + 1 = 9 0 + 1 = 1	0 0	0,89+0= 0,89* -0,07+0= - 0,07	0,89
9	0,14 - 0,07	9+ 1 = 10 0 + 1 = 1	0 0	0,14+0= 0,14* -0,07+0= - 0,07	0,14

المرحلة التاسعة (السنة رقم 9)

قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_9^{max}(K_9)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_{10}(K_{10}) + f_9^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $z_{10}^{max}(K_{10})$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 10 $t_{10}\begin{Bmatrix} x_1 \to t_9 + 1 \\ x_2 \to t_9 = 1 \end{Bmatrix}$	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{Bmatrix} f_9^{x_1} \\ f_9^{x_2} \end{Bmatrix}$	مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة العاشرة t_9
17,05	8,89 + 8,06 =17,05* -0,07+8,99 = 8,92	8,06 8,89	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	24 –15,01 = 8,99 25 – 15,07 -10 = -0,07	1
14,95	8,6+6,89 = 14,95* -0,07+8,99 = 8,92	6,89 8,99	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	8,06 - 0,07	2
12,96	6,89+6,07 = 12,96* -0,07+8,99 = 8,92	6,07 8,89	3 + 1 = 4 0 + 1 = 1	6,89 - 0,07	3
12,21	12,21 * -0,07+8,99 = 8,92	6,14 8,89	4 + 1 = 5 0 + 1 = 1	6,07 - 0,07	4
10,18	10,18 * -0,07+8,99 = 8,92	4,04 8,89	5 + 1 = 6 0 + 1 = 1	6,14 - 0,07	5
8,92	8,04 -0,07+8,99 = 8,92*	4 8,89	6 + 1 = 7 0 + 1 = 1	4,04 - 0,07	6
8,92	3,89 -0,07+8,99 = 8,92*	0,89 8,89	7 + 1 = 8 0 + 1 = 1	3 - 0,07	7
8,92	1,03 -0,07+8,99 = 8,92*	0,14 8,89	8 + 1 = 9 0 + 1 = 1	0,89 - 0,07	8

المرحلة الثامنة (السنة رقم 8):

قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_8^{max}(K_8)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_9(K_9)+f_8^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $Z_9^{max}(K_9)$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 9 $t_9\begin{cases}x_1 \to t_8+1\\ x_2 \to t_8=1\end{cases}$	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{cases}f_8^{x_1}\\ f_8^{x_2}\end{cases}$	مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة العاشرة t_8
23,94	23,94 * 16,98	14,95 17,05	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	24 –15,01 = 8,99 25 – 15,07 -10 = -0,07	1
21,02	21,02 * 16,98	12,96 17,05	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	8,06 - 0,07	2
19, 1	19, 1 * 16,98	12,21 17,05	3 + 1 = 4 0 + 1 = 1	6,89 - 0,07	3
16,98	16,25 16,98 *	10,18 17,05	4 + 1 = 5 0 + 1 = 1	6,07 - 0,07	4
16,98	15,06 16,98 *	8,92 17,05	5 + 1 = 6 0 + 1 = 1	6,14 - 0,07	5
16,98	12,96 16,98 *	8,92 17,05	6 + 1 = 7 0 + 1 = 1	4,04 - 0,07	6
16,98	11,92 16,98 *	8,92 17,05	7 + 1 = 8 0 + 1 = 1	3 - 0,07	7

المرحلة السابعة (السنة رقم 7)

مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة العاشرة t_7	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{Bmatrix} f_7^{x_1} \\ f_7^{x_2} \end{Bmatrix}$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 8 $t_8 \begin{Bmatrix} x_1 \to t_8+1 \\ x_2 \to t_8=1 \end{Bmatrix}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $z_8^{max}(K_8)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_8(K_8)+f_7^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_7^{max}(K_7)$
1	24 –15,01 = 8,99 25 – 15,07 -10 = -0,07	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	21,02 23,94	30,01 * 23,87	30,01
2	8.06 - 0,07	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	19,1 23,94	27,16 * 23,87	27,16
3	6,89 - 0,07	3 + 1 = 4 0 + 1 = 1	16,98 23,94	23,87 * 23,87 *	23,87
4	6,07 - 0,07	4 + 1 = 5 0 + 1 = 1	16,98 23,94	23,05 23,87 *	23,87
5	6,14 - 0,07	5 + 1 = 6 0 + 1 = 1	16,98 23,94	23,12 23,87 *	23,87
6	4,04 - 0,07	6 + 1 = 7 0 + 1 = 1	16,98 23,94	21,02 23,87 *	23,87

المرحلة السادسة (السنة رقم 6)

قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_6^{max}(K_6)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_7(K_7) + f_6^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $Z_7^{max}(K_7)$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 7 $t_7 \begin{cases} x_1 \rightarrow t_{k7}+1 \\ x_2 \rightarrow t_7=1 \end{cases}$	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{cases} f_6^{x_1} \\ f_6^{x_2} \end{cases}$	مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة العاشرة t_6
36,15	36,15 * 29,94	27,16 30,01	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	24 –15,01 = 8,99 25 – 15,07 -10 = -0,07	1
31,93	31,93 * 29,94	23,87 30,01	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	8,06 - 0,07	2
30,76	30,76 * 29,94	23,87 30,01	3 + 1 = 4 0 + 1 = 1	6,89 - 0,07	3
29,94	29,94 * 29,94 *	23,87 30,01	4 + 1 = 5 0 + 1 = 1	6,07 - 0,07	4
30,01	30,01 * 29,94	23,87 30,01	5 + 1 = 6 0 + 1 = 1	6,14 - 0,07	5

المرحلة الخامسة (السنة رقم 5)

قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_5^{max}(K_5)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_6(K_6)+f_5^{\lambda}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $z_6^{max}(K_6)$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 6 $t_6\begin{Bmatrix} x_1 \to t_6+1 \\ x_2 \to t_6=1 \end{Bmatrix}$	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{Bmatrix} f_5^{x_1} \\ f_5^{x_2} \end{Bmatrix}$	مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة العاشرة t_5
40,92	40,92 * 36,08	31,93 36,15	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	24 –15,01 = 8,99 25 – 15,07 -10 = -0,07	1
38,82	38,82 * 36,08	30,76 36,15	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	8,06 - 0,07	2
36,83	36,83 * 36,08	29,94 36,15	3 + 1 = 4 0 + 1 = 1	6,89 - 0,07	3
36,08	36,08 * 36,08 *	30,01 36,15	4 + 1 = 5 0 + 1 = 1	6,07 - 0,07	4

المرحلة الرابعة (السنة رقم 4)

مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة العاشرة t_4	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{Bmatrix} f_4^{x_1} \\ f_4^{x_2} \end{Bmatrix}$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 5 $t_5 \begin{Bmatrix} x_1 \to t_4+1 \\ x_2 \to t_4=1 \end{Bmatrix}$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $Z_5^{max}(K_5)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_5(K_5)+f_4^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_4^{max}(K_4)$
1	24 –15,01 = 8,99 25 – 15,07 -10 = -0,07	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	38,82 40,92	47,81 * 40,85	47,81
2	8,06 - 0,07	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	36,83 40,92	44,89 * 40,85	44,89
3	6,89 - 0,07	3 + 1 = 4 0 + 1 = 1	36,08 40,92	42,97 * 40,85	42,97

المرحلة الثالثة (السنة رقم 3)

قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_3^{max}(K_3)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $Z_4(K_4) + f_3^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $Z_4^{max}(K_4)$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 4 $t_4 \begin{cases} x_1 \to t_3+1 \\ x_2 \to t_3=1 \end{cases}$	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{cases} f_3^{x_1} \\ f_3^{x_2} \end{cases}$	مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة العاشرة t_3
53,88	53,88 * 47,74	44,89 47,81	1 + 1 = 2 0 + 1 = 1	24 –15,01 = 8,99 25 – 15,07 -10 = -0,07	1
53,03	53,03 * 47,74	42,97 47,81	2 + 1 = 3 0 + 1 = 1	8,06 - 0,07	2

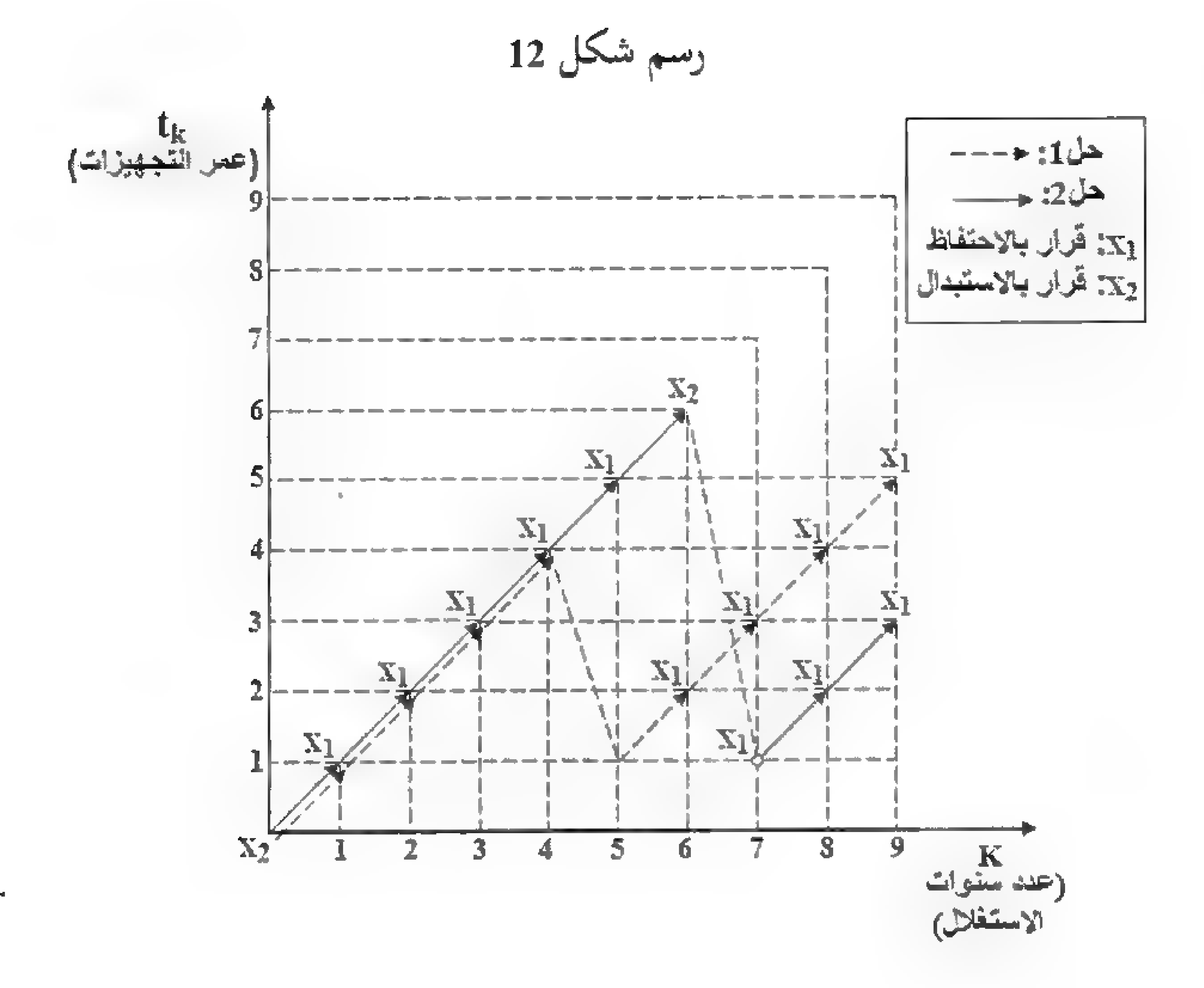
المرحلة الثانية (السنة رقم 2)

قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_2^{max}(K_2)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_3(K_3)+f_2^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $z_3^{max}(K_3)$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 3 $t_3\begin{Bmatrix} x_1 \rightarrow t_2+1 \\ x_2 \rightarrow t_2=1 \end{Bmatrix}$	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{Bmatrix} f_2^{x_1} \\ f_2^{x_2} \end{Bmatrix}$	مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة العاشرة t_2
60,02	**60,02 *** **53,.81**	**51,03** **53,88**	**1 + 1 = 2** **0 + 1 = 1**	**24 –15,01 = 8,99** **25 – 15,07 -10 = -0,07**	1

المرحلة الأولى (السنة رقم 1)

قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_1^{max}(K_1)$	قيمة الربح المحصل عليه حتى السنة الخامسة $z_2(K_2)+f_1^X$	قيمة الربح الأقصى المحصل عليه حتى السنة السادسة $z_2^{max}(K_2)$	مجال تغير عمر التجهيزات في بداية السنة 2 $t_2 \begin{Bmatrix} x_1 \to t_1+1 \\ x_2 \to t_1=1 \end{Bmatrix}$	قيمة الأرباح المحصل عليها خلال هذه السنة $\begin{Bmatrix} f_1^{x_1} \\ f_1^{x_2} \end{Bmatrix}$	مجال تغير عمر التجهيزات خلال السنة العاشرة t_1
59,95	59,95 *	60,02	1	$(f_1^{x_2}) = -0,07$	0

رسم شكل 12



III- مسألة تحديد المسارات المثلى عبر شبكة:

يستعمل أسلوب البرمجة الديناميكية في معالجة مسألة تحديد المسارات المثلى عبر شبكة، سواء تعلق الأمر بشبكات الأعمال أو بشبكات النقل، لكن تطبيق مبدأ الأمثلية المتضمن في أسلوب البرمجة الديناميكية يتطلب إمكانية تقسيم المسألة المعالجة عبر الشبكة إلى أجزاء (مراحل) مستقلة نسبيا عن بعضها.

تتطلب عملية حساب المسارات الدنيا أو العظمى عبر شبكة أتباع الخطوات التالية:

1- نقسم المسألة إلى مراحل مستقلة نسبيا، إذا كان ذلك متاحا.

-نبدأ الحل من المرحلة الأخيرة.

- نحدد نقاط الوصول في كل مرحلة ثم نحدد التكلفة حتى هذه النقاط.

- نحدد نقاط الانطلاق.

- نبحث عن كل الطرق التي تؤدي من **نقطة واحدة** من نقاط الانطلاق إلى كل نقاط الوصول، ثم نختار **أقل (أو أعظم)** قيم الطرق المنطلقة من هذه النقطة.

-نفعل نفس الشيء مع بقية نقاط الانطلاق.

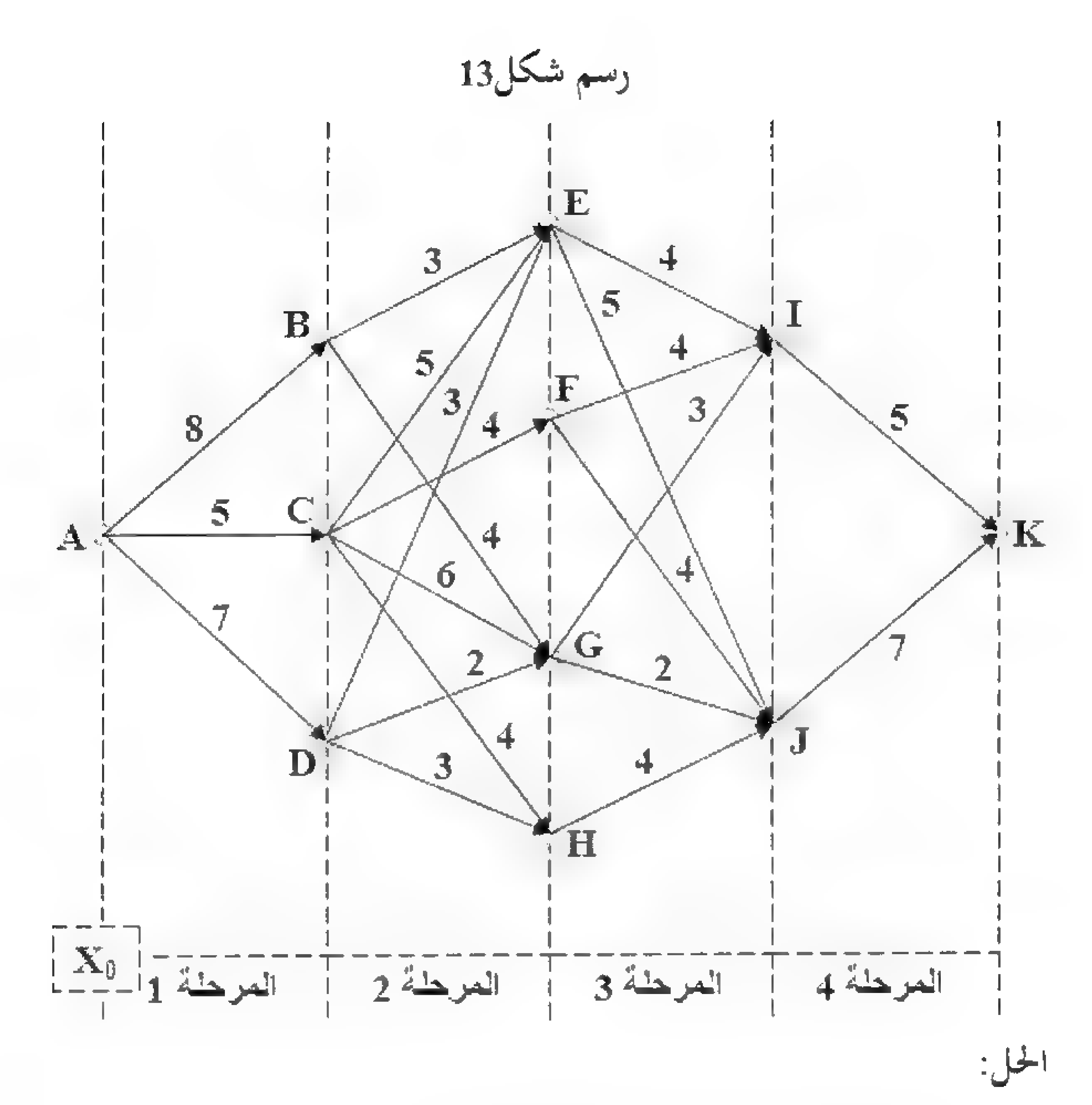
2- نكرر نفس الخطوات مع المراحل الأخرى.

مثال 1:

نريد بناء طريق سريع بين مدينتينA , K، هناك عدة إمكانيات جغرافية لإنشاء هذا الطريق، بحيث يمكن له أن يمر من خلال عدة مدن ونقاط عبور. الطريق بين كل نقطة عبور وأخرى يمثل بسهم والقيم فوق السهم تحدد تكلفة إنجاز هذا الطريق.

المطلوب: تحديد مسار إنجاز هذا الطريق الذي يكلف أقل ما يمكن، على افتراض أنه يمكن تقسيم المدن ونقاط العبور إلى مراحل محددة كما في الشكل التالي:

رسم شكل13



الحل:

ننطلق من الخلف (من نهاية الشبكة إلى بدايتها)

التكلفة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول K (0) الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول	المرحلة IV	
5	I K (5)	I K (0 + 5)	I	نقاط الانطلاق
7	J K (7)	J K (0 + 7)	J	

التكلفة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول I(5) , J(7) الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول	المرحلة III	
9	E I (9)	EI (4 + 5) / E J(5+ 7)	E	نقاط الانطلاق
9	F I (9)	FI (4 + 5) / F J(4 +7)	F	
8	G I (8)	G I (3 +5) / G J (2+7)	G	
11	H j(11)	H I(--) / H J (4 +7)	H	

التكلفة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول E(9) , F(9) , G(8), H(11) الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول	المرحلة II	
12	B E (12) / BG (12)	B E (3 + 9) /(--) / B G(4+ 8) / (--)	B	نقاط الانطلاق
13	C F (13)	C E (5 + 9) / C F(4+9) / C G(6 +8) / C H(4+11)	C	
10	D G (10)	D E (3 +9) /(--) / D G (2+8) / D H(3+11)	D	

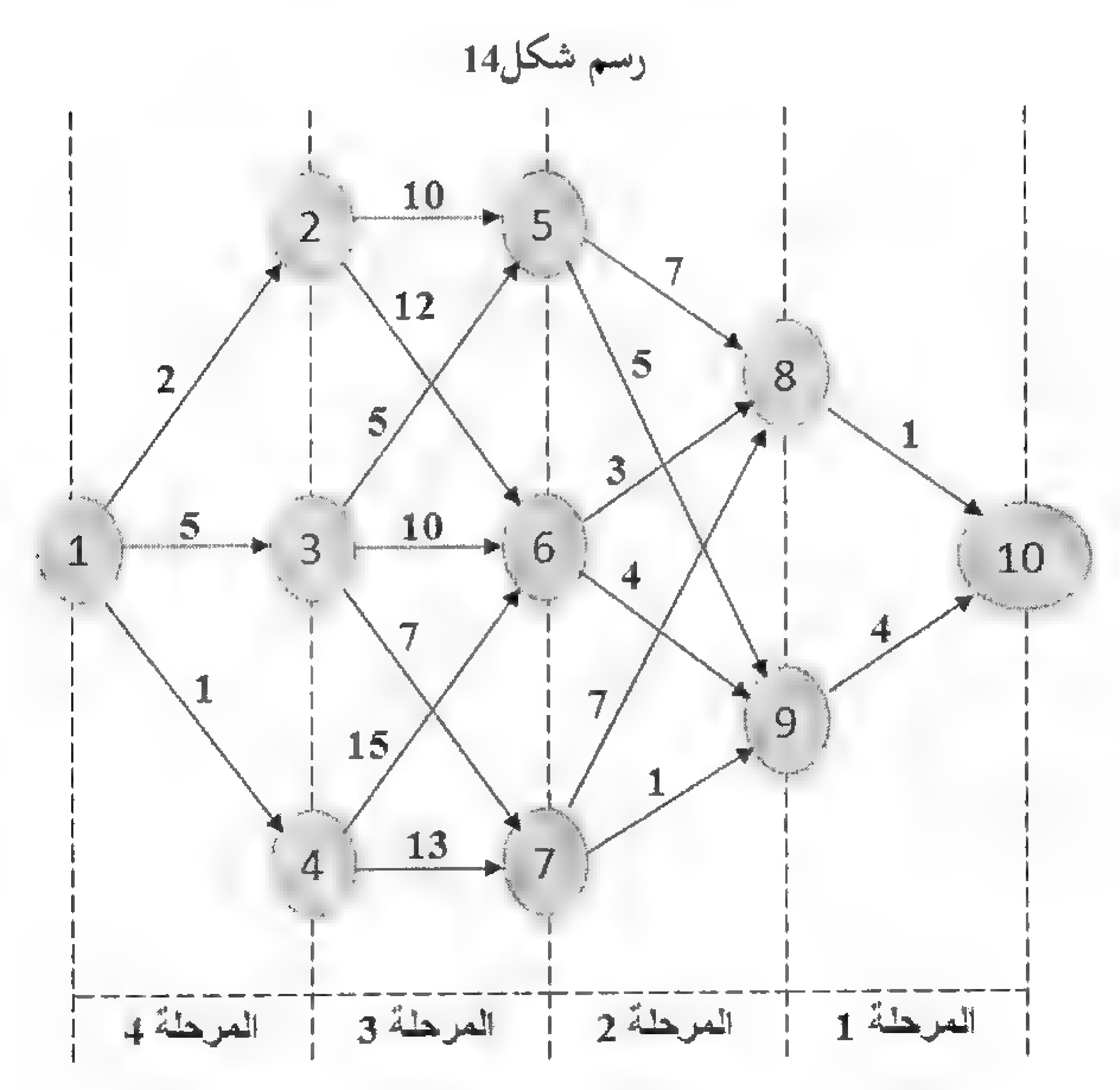
التكلفة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول B(12) , C(13) , D(10) الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول	المرحلة I	
17	AD(17)	A B (8 + 12) / A C(5+13) /A D(7+ 10)	A	نقاط الانطلاق

من نتيجة الجدول الأخير يتضح أن أدنى تكلفة إنجاز بين النقطة A و K هي 17 و.ن. وذلك بالتنقل من AD إلى DG ثم إلى GI وبعدها إلى IK. A D (17) .

مثال2:

تمثل الشبكة التالية المدد الزمنية اللازمة للانتقال بين المدن الممثلة على هذه الشبكة بدوائر. ما هو المسار الذي يؤدي إلى الانتقال من المدينة (1) إلى المدينة (10) في أقل وقت ممكن.

رسم شكل14



الحل:

نبدأ حساب المدد من الخلف (من نهاية الشبكة إلى بدايتها)

المدة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول 10 (0) الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول	المرحلة IV	
1	8 – 10 (1)	8 – 10 (1 + 0)	8	نقاط الانطلاق
4	9 – 10 (4)	9 –10 (4 + 0)	9	

المدة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول 8(1) , 9(4) الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول	المرحلة III	
8	5 – 8 (8)	5 – 8 (7 + 1) / 5–9(5+ 4)	5	نقاط الانطلاق
4	6 – 8 (4)	6 –8 (3 + 1) / 6 –9(4 +4)	6	
5	7 – 9 (5)	7 –8 (7 +1) / 7–9 (1+4)	7	

المدة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول 5(8) , 6(4) , 7(5) الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول	المرحلة II	
16	2–6 (16) /	2–5 (10 + 8) /2–6(12+4) / (––)	2	نقاط الانطلاق
12	3–7 (12)	3–5 (5 + 8) / 3–6(10+4) / 3–7(7 +5)	3	
18	4–7 (18)	(––) / 4–6 (15 +4) /4–7 (13+5)	4	

المدة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول	المرحلة I	
		2(16) , 3(12) , 4(18)		
		الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول		
17	1-3(17)	1–2 (2 + 16) /1–3(5+12) /1–4(1+ 18)	I	نقاط الانطلاق

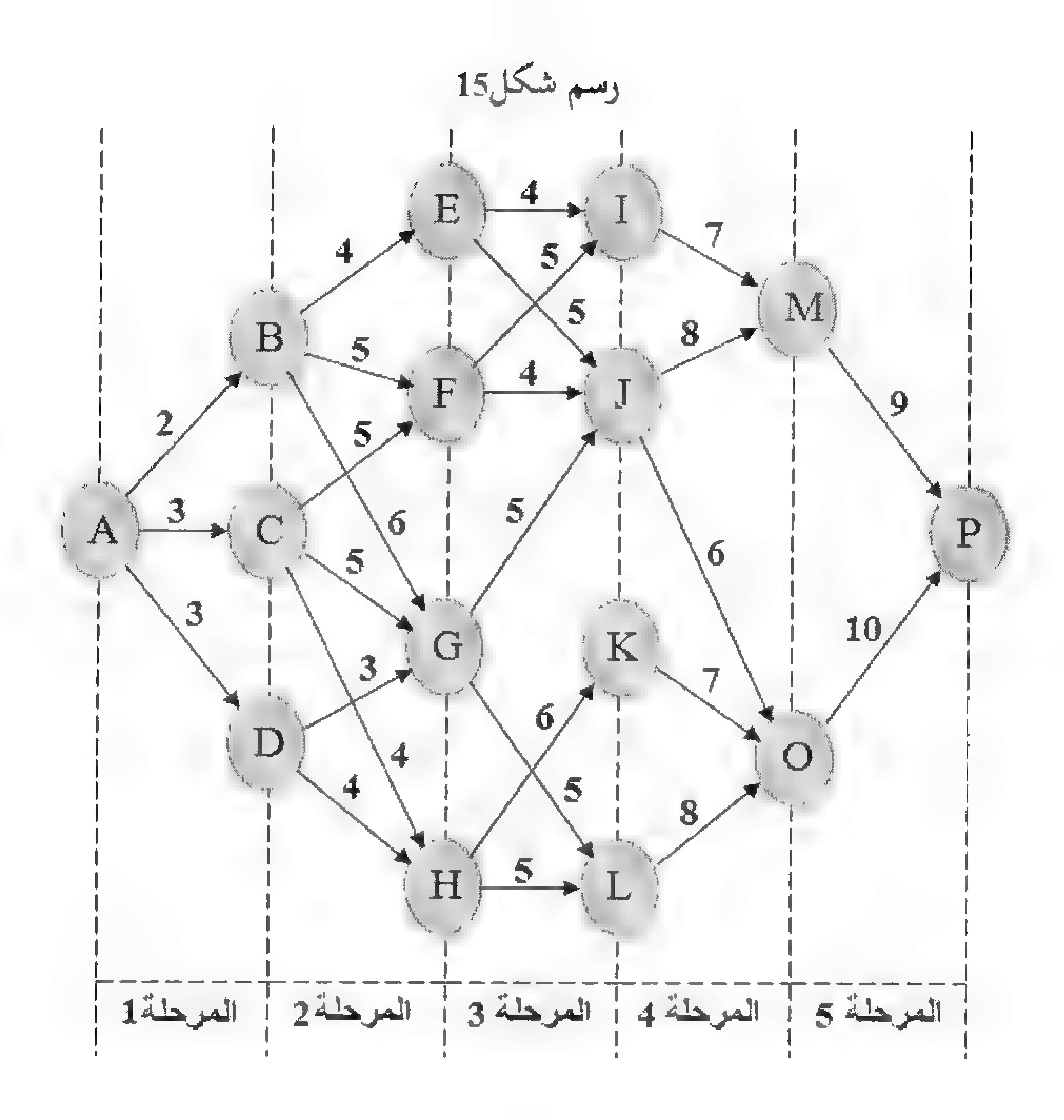
إذن أدنى مدة زمنية لقطع المسافة بين النقاط1 إلى 10 هي 17 يوما، وذلك بالتنقلبين 1 إلى 3 ثم منها إلى 7 وبعدها إلى9 ومنها إلى 10.

مثال3:

يريد أحد الرحالة الانتقال من مدينة A إلى المدينة B، لكن لا يوجد خط سفر مباشر وحيد بين المدينتين. لذلك فهو مضطر إلى أن يمر من مدن مختلفة ليصل إلى المدينة B.

يقسم المسافر هذه المسافة إلى خمس مراحل، والمخطط التالي يوضح كيفية السفر أو الانتقال إلى المدينة المبتغاة، بينما الأرقام الواقعة فوق الأسهم تحدد تكلفة السفر. المطلوب تحديد طريق السفر الأرخص باستعمال أسلوب البرمجة الديناميكية.

رسم شكل15


A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
O
P
2
3
3
4
5
6
5
5
3
4
4
4
5
5
4
5
5
6
5
5
7
8
6
7
8
9
10
المرحلة1
المرحلة2
المرحلة 3
المرحلة 4
المرحلة 5

الحل:

نباشر الحل هنا أيضا من الخلف.

التكلفة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول P (0) الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول	المرحلة V	
9	MP(9)	M P (0 + 9)	M	نقاط الانطلاق
10	O P (10)	O P (0 + 10)	O	

التكلفة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول M(9) , O(10) الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول	المرحلة VI	
16	I M(16)	I M(7 + 9) / I O(--)	I	نقاط الانطلاق
16	J O (16)	J M (8 +9) / JO(6 +10)	J	
17	K O (17)	K M (--) / KO (7+10)	K	
18	L O(18)	L M(--) / LO (8+10)	L	

التكلفة	الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق	نقاط الوصول I(16) , J(16) , K(17), L(18) الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول	المرحلة III	
20	E I(20)	E I(4 + 16) / E j(5+ 16) /(--)/ (--)	E	نقاط الانطلاق
20	F J(20)	F I (5+16) / F J(4+16) / (--) / (--)	F	
21	G J(21)	(--) /G J(5+16) / (--) / G L (5+18) / (--)	G	
23	H K (23) /HL(23)	(--)/ (--) /H K (6 + 17) /HL (5+18) /	H	

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">المرحلة II</td><td>نقاط الوصول</td><td rowspan="3">الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق</td><td rowspan="3">التكلفة</td></tr>
<tr><td>E(20) , F(20) , G(21),H(23)</td></tr>
<tr><td>الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول</td></tr>
<tr><td rowspan="3">نقاط الانطلاق</td><td>B</td><td>B E(4 + 20) / BF(5+20) / BG(6+21) /B H(--)</td><td>B E(24)</td><td>24</td></tr>
<tr><td>C</td><td>(--) / C F(5+20) / CG (5+21) / CH(4+23)</td><td>C F(25)</td><td>25</td></tr>
<tr><td>D</td><td>(--) / (--) / D G(3+21) / D H(4+23)</td><td>D G(24)</td><td>24</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">المرحلة I</td><td>نقاط الوصول</td><td rowspan="3">الطريق الأمثل للانتقال من نقاط الوصول إلى نقطة الانطلاق</td><td rowspan="3">التكلفة</td></tr>
<tr><td>B(24) , C(25) , D(24)</td></tr>
<tr><td>الطرق الممكنة للانتقال بين نقاط الانطلاق ونقاط الوصول</td></tr>
<tr><td>نقاط الانطلاق</td><td>A</td><td>A B(2 + 24)/AC(3+25) /AD(3+24)</td><td>AB(26)</td><td>26</td></tr>
</table>

من نتيجة الجدول الأخير يتضح أن أدنى تكلفة سفر يتحملها الرحالة بين النقطة A و B هي 26 و.ن. وذلك بالتنقل منAB إلى BE ثم إلى EI وبعدها إلى IMو M B.

المراجع

1-Acher-gardelle, algèbre linéaire et programmation linéaire, Dunod 1970.

2-Baumol w.J., Technique économique et analyse opérationnelle, Dunod, Paris, 1975.

3- Belletante, r., mathématique et gestion: Les outils fondamentaux, ellipses, 1995.

4- Bellman R., Notes in the theory of dynamic programming, III, equipment replacement policy, rand report, 1965.

5- Bracken, Mc Cormack, Selected Applications of non linear programming, wily,1970.

6- Chvatal V., linear programming, freeman and co, 1983.

7- Cullmann G., recherche opérationnelle, théorie et pratique, 1972.

8- Desbazeille G., exercices et problèmes de recherche opérationnelle, dunod, 1976.

9- Desplas A., mathématiques de la décision économique, dunod, Paris,1967.

10- Dorfman R.,Programmation linéaire appliquée à l'entreprise, Dunod, 1976.

11- Droesbeke, la programmation linéaire par l'exemple, ellipses, 1995.

12- Ecoto F., initiation à la recherche opérationnelle, ellipses,1986.

13- Faure R., Laurière J.l., Fiabilité et renouvellement des équipement, G. v., Paris, 1974.

14- Faure R., précis de recherche opérationnelle, bordas, 1979.

15- Faure R., Programmation dynamique et applications à la recherche opérationnelle, cours de l'institut de programmation, Paris IV, 1972.

16- Faure R., et autres , la recherche opérationnelle, que sais-je ? N°941, puf, 1974.

17- Fortet R., Abadie J., mathématiques des programmes économiques, dunod, 1976.

18- Henry-labordère A., grojnowski M., recherche opérationnelle - Exercices et problèmes avancés, masson, 1976.
19- Kaufmann A., Faure R., initiation à la recherche opérationnelle, Dunod, 1976.
20- Kaufmann A., méthodes et modèles de la recherche opérationnelle, tomes Iet II, dunod .
21- Kaufmann A., Cruon R., La programmation dynamique, Dunod, 1976.
22- Maurin H., programmation linéaireappliquée, technip, 1967.
23- Minoux M., programmationmathématique, théorie et Algorithmes, 2 tomes, dunod, 1985.
24- Orchard H. w., Advanced linear programming computing techniques, Mc G-H., 1975.
25- Roseaux, Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle, Dunod, 2000.
26- Simonnard M., programmation linéaire, dunod,2=E, 1972.
27- Sakarovitch M., linear programming, springer-verlag,1982.
28- Sordet J., les modèles, instruments de décision, dunod, 1971.
29- Sordet J., la programmation linéaireappliquée à l'entreprise, dunod, 1970.
30- Tintner G., mathématiques et statistiques pour les économistes, dunod, 1970.
31- Thompson G., les mathématiques modernes dans la pratique des affaires, bordas, 1980.

أنـجز طبعه على مطابـع
ديوان المطبوعات الجامعية
1، الساحة المركزية - بن عكنون - الجزائر